

Valós függvénytan gyakorlat

2015. április 15.

1. (Órai feladat) Egy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos, ha a grafikonja kompakt (korlátos és zárt)! Mutassuk meg, hogy (a megfelelő irányú implikáció bizonyításából) sem a korlátosság, sem a zárttság nem hagyható el!
2. Tegyük fel, hogy $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható és valamely $y \in \mathbb{R}$ értéket egy perfekt halmazon vesz fel. Igazoljuk, hogy van olyan $x \in (0, 1)$ melyre $f(x) = y$ és $f'(x) = 0$.
3. Igazoljuk, hogy ha egy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényre minden $x \in (a, b)$ -re $D^+f(x) > 0$, akkor f monoton nő. Mutassuk meg, hogy ez akkor is igaz, ha minden x -re $D^+f(x) \geq 0$ teljesül!
4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre és valamely c, d valósakra minden $x \in (a, b)$ -re $c \leq D^+f(x) \leq d$ teljesül, akkor minden $u, v \in [a, b]$ különböző pontra

$$c \leq \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq d.$$

5. Mutassuk meg, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos függvények pontonkénti limesze, ha minden U nyíltra az $f^{-1}(U) (= \{x : f(x) \in U\})$ halmaz F_σ .
6. Mutassunk példát olyan $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, amely minden intervallumon minden értéket felvesz!
7. Használva a 2. feladatot mutassuk meg, hogy nincs olyan folytonosan differenciálható függvény $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, mely minden értéket felvesz egy perfekt halmazon!

Beadható feladatok

9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ halmazokra $x \in A_1 \triangle A_2 \triangle \dots \triangle A_n$ pontosan akkor teljesül, ha x az $A_1, \dots, A_n$ halmazok közül páratlan soknak eleme!