

Halmazelmélet Gyakorlat
2012. március 30.

1. Melyek azok az $(A, <)$ rendezések melyek minden valódi kezdőszelete elem által meghatározott?
2. Bizonyítsuk be, hogy minden összefüggő gráfban van fesztőfa!
3. Igazoljuk, hogy minden $(P, <)$ részbenrendezés kiterjed teljes rendezéssé! $x, y \in P$, akkor igazoljuk, hogy $x < y$ akkor és csak akkor teljesül, ha minden lehetséges $<'$ kiterjesztésben $x <' y$.
4. Legyen H halmaz, az $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(H)$ halmaz *filter*, felfelé zárt ($A \in \mathcal{F}$ és $A \subset B$, akkor $B \in \mathcal{F}$) és metszetzárt (ha $A, B \in \mathcal{F}$, akkor $A \cap B \in \mathcal{F}$). Az $\mathcal{F}$ *ultrafilter*, ha $(\forall A \subset H)(A \in \mathcal{F} \vee A^c \in \mathcal{F})$. Igazoljuk, hogy minden filter kiterjeszthető ultrafilterré!
5. Fogalmazzunk meg és bizonyítsunk az előzővel analóg állítást Boole-algebrákra!
6. Igazoljuk, hogy ha H véges és $\mathcal{F}$ ultrafilter, akkor van egy $a \in H$, hogy $A \in \mathcal{F} \iff a \in A$.
7. Bizonyítsuk be, hogy végtelen H -ra ez már nem igaz.
8. Egy rendezést *szétszórt*nek nevezünk, ha nincs sűrűen rendezett részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy egy rendezett halmaz véges sok szétszórt részhalmazának uniója is szétszórt.
9. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}$ részhalmaza akkor és csak akkor szétszórt, ha a lezártja megszámlálható.
10. Igazoljuk, hogy bármely megszámlálhatóan végtelen rendezés rendezésizomorf egy valódi részhalmazával.
11. Van-e univerzális Borel halmaz?