

## Fejezetek az analízisből

5. Feladatsor

2016. március 8.

2. Röpdolgozat

1. Ha egy síkbeli pont polárkoordinátái  $(r, \phi)$ , akkor mik a derékszögű (szokásos) koordináták?
2. Cseréljük fel az integrálások sorrendjét!

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx$$

---

1. Számítsuk ki az  $xy + z$  függvény integrálját az alábbi tartományokon!

(a)  $A = \{(x, y, z) : x + y + z \geq 2, x \leq 1, y \leq 1, z \leq 1\}$

(b)  $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 9\}$

(c)  $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4 \leq z \leq 9\}$

(d)  $D = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

2. Legyen  $T$  az a tartomány az  $xy$ -sík első síknegyedében, melyet az  $xy = 1$ ,  $xy = 9$  hiperbolák és az  $y = x$ ,  $y = 4x$  egyenesek határolnak. Használjuk az  $x = u/v$ ,  $y = uv$ ,  $u > 0$ ,  $v > 0$  transzformációt (helyettesítést) az alábbi integrál átírására és kiszámítására!

$$\int_T \left( \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx dy$$

3. Számítsuk ki az  $x^2/a^2 + y^2/b^2$  ( $a, b > 0$ ) egyenletű ellipszis területét az  $x = au$ ,  $y = bv$  integráltranszformáció segítségével!
4. Mutassunk példát olyan  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezésre, amelyre teljesül, hogy
  - (a) az  $1 \times 2$ -es álló téglalapot egy  $2 \times 1$ -es fekvő téglalapba viszi;
  - (b) az  $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  négyzetet a  $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$  háromszögbe viszi;
  - (c) egy zárt szakaszt egy körvonalba viszi;
  - (d) egy négyzetet egy körlapba viszi.
5. Bizonyítsuk be, hogy egy  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineáris transzformáció tetszőleges mérhető halmazt  $|\det(T)|$ -szeres mértékűbe viszi!
6. Legyen

$$g(x, y, z) = (xyz, x^2 + y^2 + z^2), \quad f(u, v) = (uv, u + v).$$

- (a) Írjuk fel  $f$  és  $g$  koordinátafüggvényeit!
- (b) Hol folytonos, hol differenciálható  $f$  illetve  $g$ ?
- (c) Írjuk fel  $f$  és  $g$  Jacobi-mátrixait!
- (d)  $f \circ g$  és  $g \circ f$  közül melyiknek van értelme? Amelyiknek van, azt adjuk meg képlettel!
- (e) Számítsuk ki a kompozíció Jacobi-mátrixát közvetlenül az előző képletből is, valamint a láncszabály segítségével  $f$  és  $g$  Jacobi-mátrixából is!
- (f) Határozzuk meg az  $R$  sugarú gömb pozitív térfogatba eső részének súlypontját!