Fejezetek az analízisből
3. Feladatsor
2016. február 23.
1. Röpdolgozat

1. Döntsük el, hogy az alábbi halmazoknak létezik-e alsó/felső korlátja, minimuma/maximuma, illetve infimuma/supremuma. A minimumot, maximumot, infimumot és supremumot, ha léteznek, határozzuk is meg (indoklás nélkül).

   (a) $\mathbb{Q} \cap [0, \infty)$

   (b) $\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$

2. $\iint\limits_{[0,1]\times[-1,1]} x^2 y \, dxdy =?$

---

1. Számítsuk ki az $\iint_H xy \; dxdy$ kettős integrált, ha

   (a) $H = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

   (b) H az origó középpontú, egység sugarú kör

   (c) H az $A(0, 0), B(2, 1), C(-2, 1)$ csúcsokkal meghatározott háromszög,

   (d) $H = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y, y \leq x\}$

   (e) H az $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(1, 0)$ csúcsokkal meghatározott trapéz,

   (f) H az $A(1, 1), B(1, 0), C(0, 1)$ csúcsokkal meghatározott háromszög,

2. Határozzuk meg az alábbi testek térfogatát!

   (a) $\{(x, y, z) : -2 \leq x \leq -1, 3 \leq y \leq 7, 0 \leq z \leq x^2 y\}$

   (b) $\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y^3 + z^3, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

3. Határozzuk meg a következő integrálok értékét:

   (a) $\iint\limits_{[-1,1]^2} y^2 e^{x+y} \, dxdy$

   (b) $\iint\limits_{[1,2]^2} \frac{x \ln(y+1)}{y+1} \, dxdy$

   (c) $\iint\limits_{[1,2]^2} \frac{x}{y^2+y} \, dxdy$

   (d) $\iint\limits_{[-1,1]^2} (y^3+2y^2+y+1)(3x^3+2x^2+2x+1) \, dxdy$

   (e) $\iint\limits_{[-1,1]^2} \frac{xe^y}{e^y+1} \, dxdy$

   (f) $\iint\limits_{[-1,1]^2} \sin(3y + x)e^y \, dxdy$

4. A manók egyenletes sűrűséggel és igen sűrűn lakják háromszög alakú városukat, melynek csúcsai az $(1, 2)$, $(3, 2)$ és $(1, 4)$ koordinátájú pontokban vannak. Az x tengelyen egy meleg vizű, az y tengelyen pedig egy hideg vizű folyó folyik.

   (a) A manóknak átlagosan milyen messzire kell menniük, ha meleg és milyen messzire ha hideg vizű folyóhoz akarnak menni?

   (b) Melyik ponton lakó manónak kell épp ilyen távolságokat menni a folyókhoz?

   (c) Adjunk általános képletet a fenti pontra (melynek neve *súlypont*), amely más alakú városokra is működik!