Analízis haladó gyakorlat
6. feladatsor
2013. április 4.

1. Fogalmazzunk meg "receptet" $f(x) = \frac{a_2x^2+a_1x+a_0}{b_2x^2+b_1x+b_0}$ alakú függvények integrálására!

2. (a) $\displaystyle\int x^2 \sin x dx = ?$

   (b) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sh} x dx = ?$

   (c) $\displaystyle\int \sin x \cos x dx = ?$

   (d) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x dx = ?$

   (e) $\displaystyle\int 3\sin^3 x + \sin^2 x = ?$

   (f) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3} = ?$

   (g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - x^2} = ?$

   (h) $\displaystyle\int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{5x} - e^{4x} - e^{3x} + e^{2x}} = ?$

3. Tegyük fel, hogy f folytonos $[a,b]$-n és minden $x \in [a,b]$-re $f(x) \geq 0$. Bizonyítsuk be, hogy $\int_a^b f(x)dx = 0 \iff f \equiv 0$.

4. Legyen
$$h_2(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \text{ ha } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$
Mutassuk meg, hogy $h_2 \in (R[-1,1] \cap \mathcal{D}[-1,1]) \setminus PR[-1,1]$.

5. Bizonyítsuk be, hogy
$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + ... + \frac{1}{n^2+n^2}\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

6. * Bizonyítsuk be, hogy ha egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható, akkor folytonos valamely $x \in [a,b]$ pontban!