Analízis 3 Gyakorlat
2011. november 8.

Röpdolgozat

1. Legyen (M, ϱ) metrikus, $X \subset M$. Definiáljuk $int(X)$, $ext(X)$, $mar(X)$-et!
2. Keressünk az $f(x, y) = xy$ függvényre az $(1, 2)$ pontban ϵ-hoz δ-t!

---

1. Legyen $f(x, y) = (6x + y^2, x^3 + 20y)$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés. Adott ϵ-hoz alkalmas δ-t találva mutassuk meg, hogy f folytonos a $(0, 3)$ pontban.
2. Egyenletesen folytonos-e $\mathbb{R}^2$-en, illetve $[0, 1] \times [0, 1]$-en:
   (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
   (b) $f(x, y) = 4x + 2y - 7$;
   (c) $f(x, y) = xy$.
3. Tegyük föl, hogy $f : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény az (M, ϱ) metrikus téren. Legyen f zéróhalmaza $Z(f) = \{x \in M : f(x) = 0\}$. Mutassuk meg, hogy $Z(f)$ zárt.
4. (Tk. 19.52) Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény mindegyik f_a szekciófüggvénye folytonos és mindegyik f^b szekciófüggvénye monoton és folytonos. Bizonyítsuk be, hogy f folytonos.
5. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C[0, 1]$, akkor a grafikonja, azaz az $graf(f) = \{(x; f(x)) : x \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$ zárt halmaz. Igazoljuk, hogy a megfordítás, vagyis, "ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és $graf(f)$ zárt, akkor f folytonos" nem igaz. Fogalmazzunk meg egy ekvivalens feltételt!
6. Legyen $A = \{(x; \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0; 0)\}$. Zárt-e A?
7. Legyen (M, ϱ) metrikus tér, $H \subset M$ és $f : H \to \mathbb{R}$. Definiáljuk, $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$-t.
8. Mutassuk meg, hogy az $f(x, y) = (x, y/2)$, leképezésre $\varrho(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)) \leq \varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ teljesül. Mutassuk meg, hogy f-nek végtelen sok fixpontja van! Kontrakció-e f?
9. Legyen $f(x) = \frac{x + \frac{2}{x}}{2}$. Mutassuk meg, hogy f az $[1, 2]$ intervallumot önmagába képezi. Kontrakció-e f az $[1, 2]$-n, illetve $(0, \infty)$-en? Van-e fixpontja? Tetszőleges $x \in (0, \infty)$ esetén, mit tudunk mondani az $x_n = f^n(x)$ sorozatról, monotonitás és konvegencia szempontjából?
10. Mutassuk meg, hogy a fixponttétel egyik feltétele (a metrikus tér teljessége és, hogy f kontrakció) sem gyengíthető!