

Házi feladat a március 11-i gyakorlatra

(Feladva február 25-én)

1. Egy M üzenet kódolását lehetővé tevő WUM (Write-Unidirectional Memory, azaz egyirányúan átírható memória) kód egy olyan A_1, \dots, A_M és B_1, \dots, B_M 0 – 1 sorozatok halmazaiból álló rendszer, ahol $\forall i : A_i, B_i \subseteq \{0, 1\}^n$, és emellett fennáll

- (Dekódolhatóság)

$$\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset, B_i \cap B_j = \emptyset;$$

- (Átírhatóság)

$$\forall j, \forall x \in \cup_{i=1}^M A_i : \exists y \in B_j, y \geq x;$$

és

$$\forall j, \forall y \in \cup_{i=1}^M B_i : \exists z \in A_j, z \leq y.$$

(Itt $a \geq b, a, b \in \{0, 1\}^n$ esetén azt jelenti, hogy a minden koordinátája legalább akkora, mint b megfelelő koordinátája. Vagyis bármely $x \in \cup_{i=1}^M A_i$ a memória aktuális állapota, az átírható egy a j -edik üzenetet jelentő y kódszóvá úgy, hogy csak 0-kat kell átírni 1-re és hasonlóan, bármely $y \in \cup_{i=1}^M B_i$ a memória aktuális állapota, az átírható egy a j -edik üzenetet jelentő z kódszóvá úgy, hogy csak 1-eseket kell átírni 0-ra.)

Egy WUM kód hatékonyságát az

$$R = \frac{\log_2 M}{n}$$

hányados méri.

Gyakorlaton megadtunk minden páros n -re $R = \frac{1}{2}$ hatékonyságú WUM kódot.

Feladat:

Mutassuk meg, hogy az alábbi (Willems és Vinck által konstruált) halmazok WUM kódot alkotnak, melynek hatékonysága $R = \frac{\log_2 6}{5} \approx 0.517 > \frac{1}{2}$. (Vegyük észre, hogy - mint gyakorlaton megbeszéltük - ezzel tetszőlegesen nagy 5-tel osztható n hosszra el tudjuk érni ugyanezt a hatékonyságot.)

$$A_1 = \{11000, 00110, 00001\} \quad A_2 = \{10100, 01001, 00010\}$$

$$A_3 = \{10001, 01010, 00100\} \quad A_4 = \{10010, 00101, 01000\}$$

$$A_5 = \{01100, 00011, 10000\} \quad A_6 = \{00000\}$$

$$\forall i : B_i = \{\bar{x} : x \in A_i\}.$$

Itt \bar{x} azt a $0 - 1$ sorozatot jelenti, ami minden koordinátájában eltér az x $0 - 1$ sorozattól.

2. Keressünk kapcsolatot az előző feladatban szereplő Willems-Vinck féle WUM kód és a Baranyai tétel között és ezt a kapcsolatot felhasználva adjunk még jobb hatékonyságú WUM kódot!
3. Mutassuk meg, hogy egy n elemű halmaz összes részhalmazának halmaza particionálható $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ láncra. (Halmazok egy halmaza láncot alkot, ha közöttük bármelyik kettőre igaz, hogy az egyik tartalmazza a másikat.)

(Megjegyzés: Gyakorlaton megbeszéltük, hogy a fenti állításból azonnal adódik a Sperner tétel, hiszen egy Sperner rendszer egy ilyen láncokra való partíció minden láncból legfeljebb egy elemet tartalmazhat, ezért nem lehet $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ -nél több eleme.)