Házi feladatok a május 7-i gyakorlatra
(Feladva április 23-án)

1. Mutassuk meg, hogy a $\mu(n,k) \leq \binom{2k-1}{k}$ egyenlőtlenség $n = 2k+1$ esetén is egyenlőséggel teljesül, vagyis, hogy
$$\mu(2k+1,k) = \binom{2k-1}{k}.$$
(Emlékeztető $\mu(n,k)$ definíciójára: Legyen $n \geq 2k$ és jelentse $\mu(n,k)$ azt a minimális számot, ahány él azonos színű csúcsokat kell, hogy összekössön ha a $\mathrm{KG}(n,k)$ Kneser gráf csúcsait $n-2k+1$ színnel színezzük.)

2. (Fordított Páratlanváros): A 99 lakosú Fordított Páratlanvárosban úgy szól az Egyesületi Törvény, hogy minden egyesület taglétszáma páros szám kell, hogy legyen és bármely két különböző egyesületnek csak páratlan számú közös tagja lehet. Mennyi a Fordított Páratlanvárosban alakítható egyesületek maximális száma?

3. Mutassuk meg, hogy K_n élhalmaza több mint 2^{n-4} lényegesen különböző (ezen azt értjük, hogy nemizomorf) módon felbontható $n-1$ páronként éldiszjunkt teljes páros részgráfjának uniójára!

   (Két felbontást izomorfnak mondunk, ha a csúcshalmaz permutálásával egymásba vihetők.)

   [Korábban itt tévedésből más definíció szerepelt az izomorfia értelmezésére, a hibáért elnézést kérek. SG]

4. (a) Rajzoljuk le (minél átláthatóbb módon) az $\mathrm{SG}(6,2)$ gráfot!

   (b) Rajzoljuk le (minél átláthatóbb módon) az $\mathrm{SG}(8,3)$ gráfot!

5. Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform τ-kritikus hipergráf, melyre $\tau(\mathcal{H}) = t$. (A τ-kritikusság azt jelenti, hogy egy tetszőleges $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ él elhagyása esetén keletkező $\mathcal{H}'$ hipergráfra $\tau(\mathcal{H}') < \tau(\mathcal{H})$.) Bizonyítsuk be, hogy
$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \leq \binom{t+k-1}{k}.$$
Mutassuk meg azt is, hogy az egyenlőtlenség éles, vagyis megadható ennyi élű, a feltételeknek eleget tevő hipergráf.