Házi feladatok a május 21-i gyakorlatra
(Feladva május 7-én)

1. Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform τ-kritikus hipergráf, melyre $\tau(\mathcal{H}) = t$. (A τ-kritikusság azt jelenti, hogy egy tetszőleges $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ él elhagyása esetén keletkező $\mathcal{H}'$ hipergráfra $\tau(\mathcal{H}') < \tau(\mathcal{H})$.) Bizonyítsuk be, hogy
$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \leq \binom{t+k-1}{k}.$$
(Ez a feladat már a múltkori házi feladatok között is szerepelt. Ott volt egy második része is - azt is bizonyítani kellett, hogy az egyenlőtlenség éles -, ennek megoldása elhangzott a gyakorlaton.)

   Az egyenlőtlenség bizonyítását az alábbi ötlet közreadásával szerepeltetjük újra a házi feladatok között: Használjuk a Bollobás egyenlőtlenséget!

2. Mutassuk meg, hogy a Graham által talált gráf (melyet úgy kaphatunk meg, hogy egy 5 csúcsú kör minden csúcsát összekötjük egy ettől a körtől pontdiszjunkt K_3 minden csúcsával) teljesíti, hogy éleinek tetszőleges 2-színezése esetén keletkezik egyszínű háromszög.

3. Jelölje $R(3;n)$ azt az $R(3,3,\ldots,3)$ Ramsey számot, ahol a zárójelben álló 3-asok száma n. Bizonyítsuk be, hogy
$$R(3;n) \leq 1 + n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right).$$

4. Az ún. Gyárfás-Sumner sejtés (mely bő négy évtizede nyitott) azt állítja, hogy minden T fához létezik olyan $f_T : N \to N$ (itt N a természetes számok halmazát jelöli) függvény, hogy ha G tetszőleges olyan gráf, amiben T nem található meg feszített részgráfként, akkor $\chi(G) \leq f_T(\omega(G))$. (Vagyis, hogy az ilyen gráfokban a kromatikus szám felülről becsülhető a klikkszámnak valamilyen csak a T-től függő függvényével. Ez annak fényében érdekes, hogy általánosságban még egy három méretű klikket sem tartalmazó gráf kromatikus száma is akármilyen nagy lehet.)

   Mutassuk meg, hogy $T = K_{1,r}$, vagyis egy $r+1$ csúcsú csillag esetén igaz a Gyárfás-Sumner sejtés!