Feladatok

1. Hányféleképpen állhat sorba n fiú és n lány úgy, hogy azonos neműek ne álljanak egymás mellett?

2. Hány olyan hétszámjegyű telefonszám készíthető, amiben pontosan két különböző számjegy szerepel, és ezek egyike sem a 0?

3. Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba $2n$ különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?

4. Jelölje $\phi(n)$ az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egészek számát. Bizonyítsuk be, hogy ha $n = \Pi_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ az n pozitív egész szám prímtényezős felbontása, akkor $\phi(n) = n\Pi_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})$.

5. Bizonyítsuk be, hogy $\Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

6. Öt lány és három fiú röplabdázik. Hányféleképpen oszthatók két négyfős csapatba úgy, hogy mindkét csapatban legyen fiú?

7. Tíz rabló a kincseit egy több lakattal lezárható ládában gyűjti. Az egyes lakatokat egy-egy (egymástól eltérő) kulcs nyitja, és minden kulcsból akárhány példány kérhető az alábbiak eléréséhez. A rablók úgy szeretnék kiosztani egymás között a kulcsokat, hogy bármely négy rabló gyűlik össze, ők együttesen ki tudják nyitni a ládát, ugyanakkor ezt semelyik három rabló ne tudja megtenni. Minimálisan hány különböző lakatra van szükség ennek megvalósításához?

8. Mutassuk meg, hogy egy véges egyszerű gráfnak mindig van két azonos fokszámú csúcsa.

9. A Kovács házaspár házibulit rendez, négy másik párt hívnak meg, így összesen tízen vannak. A résztvevők közül csak némelyek ismerik egymást, mások nem, de természetesen mindenki ismeri a házastársát. Kovács úr megfigyeli, hogy ha a többieket végigkérdezné hány ismerősük van a jelenlevők között, mind a kilenc megkérdezett más választ adna. Mondjuk meg, hogy ekkor hány ismerőse van a jelenlévők között Kovácsnénak. (Feltételezzük, hogy az ismeretségek kölcsönösek.)

10. Mutassuk meg, hogy tetszőleges véges egyszerű gráf páros sok páratlan fokszámú csúcsot tartalmaz.

11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges G gráfra fennáll, hogy $|E(G)| \geq |V(G)| - c(G)$, ahol $c(G)$ a G gráf összefüggő komponenseinek számát jelöli.

12. Hány különböző egyszerű gráf adható meg n címkézett ponton?

13. Hány különböző Hamilton-kör van az n csúcsú teljes gráfban $n \geq 3$ esetén? (A pontokat címkézettnek tekintjük.)

14. Hány különböző olyan fa adható meg $n \geq 4$ címkézett ponton, amelyben a nem-elsőfokú pontok száma pontosan kettő?

15. Hány különböző olyan fa adható meg az $1, 2, \ldots, 8$ címkézett csúcsokon, ami az $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}$ teljes párosítás élei közül legalább az egyiket nem tartamazza?

16. Mi lehet a G gráf, ha $\Delta(G) \leq 2$?

17. Legyen $k \leq \frac{n}{2}$ és jelölje $\mathrm{KG}(n, k)$ a következő gráfot. $\mathrm{KG}(n, k)$ csúcsai az $\{1, 2, \ldots n\}$ halmaz összes k-elemű részhalmazai. Két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha a két megfelelő k-elemű részhalmaz diszjunkt. ($\mathrm{KG}(n, k)$ az n, k paraméterű Kneser-gráf.)

    Mutassuk meg, hogy a $\mathrm{KG}(5, 2)$ Kneser-gráf izomorf a Petersen-gráffal.

18. Mutassuk meg, hogy ha egy n csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor biztosan keletkezik olyan részgráfja, mely n csúcsú fa, és minden éle azonos színű.

19. Adjuk meg az összes önkomplementer gráfot öt és hat ponton!

20. Adjuk meg az összes önkomplementer fát!

21. Tegyük fel, hogy T olyan fa, amelyhez hozzá lehet adni egyetlen élet úgy, hogy az így keletkező gráfban legyen zárt Euler-séta. Mennyi a T-ben előforduló maximális fokszám?

22. Minimálisan hány töréssel törhető darabjaira egy 6×8-as tábla csokoládé?

23. Adott r darab, egyenként k csúcsú pontdiszjunkt fa. Hányféleképpen egészíthető ki ez az r fa egyetlen $k \cdot r$ csúcsú fává? (A kiegészítés úgy értendő, hogy az r fa mindegyike részgráfja lesz a keletkező $k \cdot r$ csúcsú fának.)

24. Mennyi az optimális kínai postás útvonal hossza a d dimenziós hiperkocka gráfjában?

25. Egy gráf csúcsai egy 100 elemű halmaz összes részhalmazai az üres halmazt kivéve. Két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha a megfelelő halmazok egyike tartalmazza a másikat és az elemeik számának különbsége 1. Hány élből áll a legrövidebb kínai postás útvonal ebben a gráfban?

26. Legyen G olyan gráf, amiben minden fokszám 4. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei kiszínezhetők két színnel, pirossal és kékkel, úgy, hogy minden csúcsba két piros és két kék él fusson be.

27. (Rédei tétele) Mutassuk meg, hogy egy irányított teljes gráfban (tournamentben) mindig van irányított Hamilton-út.

28. Mutassuk meg, hogy egy irányított teljes gráfban (tournamentben) mindig van olyan pont, amiből az összes többi legfeljebb két (az élek irányításának megfelelő) lépésben elérhető.

29. Mutassuk meg, hogy a $\mathrm{KG}(50, 3)$ Kneser-gráf tartalmaz Hamilton-kört. (A Kneser-gráf definícióját ld. a 17. feladatnál.)

30. A G egyszerű gráfról tudjuk, hogy d-reguláris és a csúcsainak száma 2009. Mutassuk meg, hogy ha $d > 1004$, akkor G Hamilton-kört is és Euler-kört is tartalmaz.

31. A G_n gráf csúcsai legyenek egy n elemű halmaz összes részhalmazai (a nem valódi részhalmazokat, tehát az üreshalmazt és a teljes halmazt is beleértve). Két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha a megfelelő halmazok diszjunktak. Milyen n esetén van a G_n gráfban Euler-kör, illetve Euler-út?

32. A világ 30 városáról tudjuk, hogy ha kettő között nincs közvetlen repülőjárat, akkor a többi huszonnyolc város mindegyike közvetlen járattal elérhető valamelyikükből, és legalább két város (szintén a többi huszonnyolc közül) mindkettőjükből. Bizonyítsuk be, hogy ekkor tehető olyan körutazás repülőgéppel, mely e harminc várost érinti (mást nem), és mindegyiket pontosan egyszer, illetve a kiinduló várost a körutazás végén még egyszer.

33. Egy hotelba egy 100 fős társaság érkezett, akik közül kezdetben bármely két ember jóban volt egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal köré ül le mindenki vacsorázni. Sajnos egy-egy vacsora alkalmával az egymás mellé került emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy mindenki jóban legyen a szomszédaival. Ha ez lehetetlen, akkor az összes résztvevő még aznap este hazamegy, előbb azonban nem. Bizonyítsuk be, hogy legalább 25 éjszakát a hotelban tölt a társaság!

34. Egy G egyszerű gráf csúcsai $v_1, \ldots, v_9$. Elkészítjük belőle a $v_1, \ldots, v_9, w_1, \ldots, w_9$ csúcsokon adott G' gráfot a következő módon. A v_i és v_j csúcsok között pontosan akkor van él G'-ben, ha él van köztük G-ben. A w_i és w_j csúcsok minden i, j esetén összekötetlenek, végül w_i pontosan akkor van összekötve v_j-vel, ha $i \neq j$. Tudjuk még, hogy a G' gráf kromatikus száma megegyezik a G gráf kromatikus számával. Megmondható-e ebből, hogy mi a G gráf?

35. Legyen G a következő gráf. $V(G) = \{1, 2, \ldots, 2008\}$ és két csúcs pontosan akkor alkot élet, ha a nekik megfelelő számok nem egyenlők és legnagyobb közös osztójuk nagyobb 1-nél. Mennyi G kromatikus száma?

36. Legyen G a következő gráf. $V(G) = \{1, 2, \ldots, 1023\}$ és két csúcs pontosan akkor alkot élet, ha az egyiknek megfelelő szám osztója a másiknak megfelelő számnak (de a kettő nem egyenlő). Mennyi G kromatikus száma?

37. Legyen G olyan $2n+1$ csúcsú gráf, amiben minden fokszám legalább n. Mutassuk meg, hogy G tartalmaz Hamilton-utat.

38. Mutassuk meg, hogy egy r-reguláris páros gráfban $r \geq 1$ esetén mindig van teljes párosítás.

39. A $G = (A, B; E)$ páros gráfban $|A| = |B| = m$ és az A-beli pontok $d_1, \ldots, d_m$ fokszámaira $d_i = i$ teljesül minden $1 \leq i \leq m$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.

40. Egy $G = (A, B, E)$ egyszerű páros gráfra $|A| = |B| = n$ és $\nu(G) = k$, ahol $k \leq n$. Tudjuk továbbá, hogy G ezen feltételek mellett a lehető legtöbb élet tartalmazza. Hány éle van G-nek? Adjuk is meg G-t izomorfia erejéig!

41. Mennyi a $\frac{\tau(G)}{\nu(G)}$ hányados lehető legnagyobb értéke, ha G véges egyszerű gráf?

42. Bizonyítsuk be, hogy n csúcsú egyszerű gráfra mindig fönnáll a $2\nu(G) + \alpha(G) \geq n$ egyenlőtlenség.

43. Egy mátrix *duplán sztochasztikus*, ha minden eleme nemnegatív, és az elemek összege minden sorban és minden oszlopban 1. Mutassuk meg, hogy duplán sztochasztikus négyzetes mátrix determinánsának van pozitív kifejtési tagja.

44. Egy szigeten n család lakik. A sziget elöljárói felosztották az egész szigetet n egyenlő területű vadászati körzetre és ezzel egyidejűleg (az előbbitől függetlenül, ezért egészen más módon) felosztották az egész szigetet n egyenlő területű mezőgazdasági területre. Most azt szeretnék elérni, hogy minden családhoz tartozzon egy vadászati és egy mezőgazdasági terület úgy, hogy a két területnek legyen közös része. Megoldható-e ez mindig?

45. Egy 7×7-es sakktábla minden mezőjén ül egy mókus. Sípszóra mindegyik átugrik egy a sajátjával egyetlen csúcsban érintkező mezőre. (Egy-egy mezőre többen is ugorhatnak.) Minimálisan hány mező marad üresen?

46. Legyen G n csúcsú egyszerű reguláris gráf. Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$. Mi az egyenlőség feltétele?

47. Legyen G egy 2009 csúcsú reguláris egyszerű gráf. Tegyük fel, hogy sem G, sem $\bar{G}$ nem teljes gráf. Állapítsuk meg a $\chi_e(G) + \chi_e(\bar{G})$ összeg értékét.

48. Mutassuk meg, hogy egy r-reguláris páros gráf élhalmaza felbontható r darab diszjunkt teljes párosítás uniójára.

49. Bizonyítsuk be, hogy ha G nem páros gráf, akkor megadhatók a csúcsainál olyan preferencia listák, melyekre vonatkozóan G nem tartalmaz stabil párosítást!

50. Egy iskolában k klub működik, melyeknek diákok a tagjai. Minden klubnak szeretnénk a tagjai közül vezetőt választani úgy, hogy egy diák legfeljebb egy klubnak legyen a vezetője. Mutassuk meg, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy ez lehetséges legyen az, hogy minden $i \leq k$ számra teljesüljön, hogy tetszőleges i klub tagságának uniója legalább i diákból áll.

51. Legyen G olyan véges egyszerű, 3-reguláris gráf, amely tartalmaz elvágóélet (azaz hidat). Mennyi G élkromatikus száma?

52. Mutassuk meg, hogy ha G páratlan csúcsú, legalább egy élet tartalmazó, egyszerű reguláris gráf, akkor G élkromatikus száma is páratlan.

53. Legyen G olyan gráf, melynek kromatikus száma 5, és tekintsük G-nek egy jó színezését a piros, kék, zöld, sárga és lila színekkel. Mutassuk meg, hogy az ilymódon színezett G-ben biztosan van olyan négyágú csillag (tehát $K_{1,4}$) részgráf, melynek negyedfokú (tehát középső) pontja piros, a másik négy pontja pedig mind különböző színű (vagyis az egyik kék, egy másik zöld, egy harmadik sárga és a negyedik lila).

54. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges egyszerű G gráfra fennáll $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.

55. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy n csúcsú véges egyszerű gráf, akkor $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$.

56. Jelölje M_k a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k. (M_2 a két csúcsot és egyetlen élet tartalmazó gráf, M_3 az 5 hosszú, húr nélküli kör.) Bizonyítsuk be, hogy $k > 2$ esetén $\nu(M_k) = \frac{|V(M_k)|-1}{2}$.

57. Jelölje M_k a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k. Milyen k értékekre tartalmaz M_k Euler-kört?

58. Jelölje M_k ismét a k-adik Mycielski-gráfot. Milyen k értékekre tartalmaz M_k Hamilton-kört?

59. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq \tau(G) + 1$.

60. Bizonyítsuk be, hogy minden gráfra fennáll, hogy

$$\chi(G) \leq \max\{\delta(G') : G' \subseteq G\} + 1,$$

ahol $\delta(F)$ az F gráf minimális fokszámát jelöli.

61. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges egyszerű gráfra fennáll, hogy $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

62. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy n csúcsú véges egyszerű gráf, melynek fokszámai $d_1, d_2, \ldots, d_n$, akkor $\Sigma_{i=1}^n d_i \geq \chi(G)(\chi(G) - 1)$.

63. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy n csúcsú véges egyszerű gráf, melynek fokszámai $d_1, d_2, \ldots, d_n$, akkor $\Sigma_{i=1}^n \binom{d_i}{2} \geq \binom{\chi_e(G)}{2}$.

64. Mutassuk meg, hogy tetszőleges véges egyszerű gráfra fönnáll az $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$ egyenlőtlenség. (Szokás szerint $\alpha(G)$ a független pontok maximális száma, $\Delta(G)$ pedig a maximális fokszám G-ben.)

65. Mutassuk meg, hogy $\chi(\mathrm{KG}(n, k)) \leq n-2k+2$, ahol $\mathrm{KG}(n, k)$ az n, k paraméterű Kneser-gráf. (A Kneser-gráf definícióját ld. a 17. feladatnál. Az ott leírt definícióhoz híven, feltesszük, hogy $n \geq 2k$.)

66. Legyen adva a síkon véges számú egyenes, melyek közül semelyik három sem metszi egymást egy pontban. Tekintsük az egyenesek metszéspontjait egy G gráf csúcsainak, és ugyanezen gráf élei legyenek az egyes egyeneseken szomszédosan elhelyezkedő metszéspontokból léterejött csúcspárok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.

67. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf csúcsainak van olyan sorrendje, amely sorrendben mohón színezve a csúcsokat optimális színezést kapunk. Mutassuk meg azt is, hogy tetszőleges k számhoz létezik olyan páros gráf és csúcsainak olyan sorrendje, hogy ebben a sorrendben mohón színezve a gráfot, a felhasznált színek száma k-nál nagyobb lesz.

68. Mutassuk meg, hogy ha G páros gráf, akkor $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$, vagyis G komplementerében a kromatikus szám és a klikkszám egyenlő.

69. Legyen G k-kromatikus gráf. (Ez annyit jelent, hogy $\chi(G) = k$). Legyen $A \subseteq V(G)$ olyan részhalmaza a csúcsoknak, amire $\forall a, b \in A$ esetén az a és b pontok távolsága G-ben legalább 4. Bizonyítsuk be, hogy az A-beli csúcsok tetszőleges, legfeljebb $k+1$ színt felhasználó színezése kiegészíthető G-nek egy legfeljebb $k+1$ színt felhasználó jó színezésévé.

70. Legyen G_1 és G_2 két véges egyszerű gráf, melyek kromatikus száma három. Definiáljuk általuk az alábbi F gráfot. F csúcsai az összes olyan rendezett (u, v) párok, melyekre $u \in V(G_1)$ és $v \in V(G_2)$. Két ilyen csúcs, (u_1, v_1) és (u_2, v_2) akkor és csak akkor van összekötve F-ben, ha $\{u_1, u_2\} \in E(G_1)$ és $\{v_1, v_2\} \in E(G_2)$ is teljesül. Bizonyítsuk be, hogy F kromatikus száma is három.

71. Bizonyítsuk be, hogy $K_{1,3}$ nem lehet feszített részgráfja semmilyen véges egyszerű gráf élgráfjának.

72. Mennyi K_n élkromatikus száma?

73. Mennyi az n-csúcsú teljes gráf élgráfja komplementerének kromatikus száma? (Röviden: $\chi(\overline{L(K_n)} = ?)$

74. Legyen a G gráf a háromdimenziós kocka élhálózatának gráfja, melyen jelöljük ki egy testátló két átellenes csúcsát, melyeket s-sel és t-vel jelölünk. Legyenek az élek úgy irányítva, hogy s-hez közelebbi csúcsukból mutassanak az s-től távolabbiba. Az így megadott irányított gráf legyen egy hálózat gráfja, melyben s a forrás és t a nyelő. A kapacitásokat úgy kell megadnunk, hogy négy él kapacitása 1 egység, négy él kapacitása 2 egység és négy él kapacitása 3 egység legyen, továbbá, hogy a hálózat áteresztőképessége maximális legyen ezen feltételek mellett. Mekkora lesz az így kapott hálózatban megadható maximális folyam?

75. Egy hálózat gráfja az $\{1, 2, \dots, n\}$ csúcsokon adott irányított teljes gráf, melynek minden éle a kisebb címkéjű csúcsból a nagyobb címkéjű felé van irányítva. A forrás az 1, a nyelő az n címkét viselő csúcs. Az (i, j) él kapacitása $j - i$ minden $i < j$ párra. Mekkora a hálózatban megadható maximális folyam értéke?

76. A G gráf csúcsai legyenek az n hosszúságú $0-1$ sorozatok, és az $\mathbf{x} = x_1 \dots x_n$ sorozatból mutasson él az $\mathbf{y} = y_1 \dots y_n$ sorozatba, ha a két sorozat pontosan egy koordinátában különbözik és erre az i koordinátára $x_i = 0, y_i = 1$ áll. Az így kapott él kapacitása legyen egyenlő i-vel. Legyen $s = (0 \dots 0), t = (1 \dots 1)$. Mutassuk meg, hogy az így megadott (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam értéke semmilyen n-re nem nagyobb 2^{n-1}-nél, $n \geq 5$ esetén pedig határozottan kisebb annál.

77. Legyen G 3-reguláris gráf, amire $\chi_e(G) = 3$. Tudjuk továbbá, hogy G éleinek (a színek egymás közötti triviális permutációjától eltekintve) egyetlen jó három színnel való színezése létezik. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van Hamilton-köre.

78. Mutassuk meg, hogy ha G összefüggő r-reguláris páros gráf, aminek legalább három csúcsa van, akkor G kétszeresen is összefüggő.

79. Mutassuk meg, hogy ha egy 3-reguláris gráf 3-szorosan élösszefüggő, akkor háromszorosan összefüggő is.

80. Mutassuk meg, hogy ha G_1 és G_2 két gráf ugyanazon a V csúcshalmazon és $G_1 \cup G_2$ a $(V, E(G_1) \cup E(G_2))$ módon megadható gráfot jelöli, akkor $\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.

81. Mutassuk meg, hogy 2^{n-1} darab 0 és 2^{n-1} darab 1-es elrendezhető olyan ciklikus sorrendben, hogy az így kapott kör mentén egymás mellett álló bináris számjegyekből létrejövő bináris n-esek között mind a 2^n lehetséges bináris n-es pontosan egyszer előforduljon.