Feladatok (2020. május. 21.)

1. Legyenek n, k pozitív egészek, melyekre $n > 2k$, és jelölje $Z_{n,k}$ a következőképpen megadott gráfot.

$$V(Z_{n,k}) = [n] = \{1, 2, \ldots, n\},$$

$$E(Z_{n,k}) = \{ij : i, j \in [n], k \leq |i - j| \leq n - k\}.$$

   Adjuk meg $\chi_f(Z_{n,k})$ értékét!

2. Határozzuk meg a Grötzsch gráf tört kromatikus számát!

   (A Grötzsch gráf a C_5 körből a Mycielski konstrukcióval előálló gráf. Az a G gráf tehát, amely, 11 csúcsát $a, b, c, d, e, a', b', c', d', e', z$-vel jelölve, a következő módon adható meg: Az a, b, c, d, e pontok egy öt hosszú kört feszítenek. Az a', b', c', d', e' csúcsok mindannyian össze vannak kötve z-vel, továbbá vesszőtlen párjuknak az $\{a, b, c, d, e\}$ halmazban levő szomszédaival. Tehát például a' szomszédai b, e és z – feltételezve, hogy a szomszédai az $\{a, b, c, d, e\}$ halmazon feszített C_5-ben b és e.)

3. Jelölje G_n azt a gráfot, ami a K_n teljes gráfból úgy jön létre, hog annak minden élét egy három élből álló úttal helyettesítjük. (G_n csúcsainak száma tehát $n + 2\binom{n}{2} = n^2$.) Mutassuk meg, hogy minden rögzített b pozitív egészhez létezik olyan n_0, hogy $n \geq n_0$ esetén

$$\chi_b(G_n) = 3b.$$

A 3. feladat megoldása

Az, hogy $\chi_b(G_n) \leq 3b$ minden n-re igaz: színezzük az eredeti, tehát a K_n-hez tartozó csúcsokat az $1, 2, \ldots, b$ színekkel, az eredeti éleket felosztó csúcsok egyikét minden ilyen él esetén a $b+1, b+2, \ldots, 2b$ színekkel, másikát a $2b+1, 2b+2, \ldots, 3b$ színekkel. Könnyű ellenőrizni, hogy ez jó b-szeres színezés, tehát a létezése igazolja hogy $\chi_b(G_n) \leq 3b$.

Megmutatjuk, hogy ha $n > \binom{3b-1}{b}$, akkor $\chi_b(G_n) \geq 3b$ is igaz, vagyis $3b-1$ szín nem elég. Tegyük fel, hogy sikerült ennyi színnel megadni egy b-szeres színezést. Ekkor n megválasztása és a skatulyaelv alapján adódik, hogy lesz két eredeti (tehát már a K_n-ben is szereplő) csúcs, amik ugyanazt a b színt kapták, alkossák ezen színek a B halmazt. (Tehát $|B| = b$.) De akkor az előbbi két csúcs között eredetileg levő élt felosztó két pont egyikén sem szerepelhet már B-beli szín. Ha a rajtuk levő színek halmaza A és C, akkor tehát $A \cap B = \emptyset$ és $C \cap B = \emptyset$. De ez a két csúcs szomszédos, tehát $A \cap C = \emptyset$ szintén fönnáll, vagyis $|A \cup B \cup C| = 3b$, tehát mégsem lehetséges, hogy csak $3b-1$ színt használtunk. QED

(Az első két feladatot a gyakorlaton megoldottuk, ez a felvételen megnézhető.)