

Feladatok (2020. márc. 26.)

1. $\text{ch}(C_k) = ?$
2. $\text{ch}(K_{n,n^n}) = ?$
3. Hány csúcsa van a $\text{KG}(n, k)$ Kneser gráfban található legnagyobb csúcsszámú teljes páros részgráfnak?
4. Definiáljuk az r -uniform $\text{KG}^{(r)}(n, k)$ Kneser hipergráfot minden $r \geq 2, k \geq 1$ és $n \geq rk$ pozitív egészekből álló számhármásra az alábbi módon

$$V(\text{KG}^{(r)}(n, k)) := \binom{[n]}{k},$$

$$\mathcal{E}(\text{KG}^{(r)}(n, k)) := \{\{A_1, A_2, \dots, A_r\} : \forall i \neq j \ A_i \cap A_j = \emptyset\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\chi(\text{KG}^{(r)}(n, k)) \leq \left\lceil \frac{n - (kr - 1)}{r - 1} \right\rceil + 1.$$

(Megjegyzés: Érdekes észrevenni, hogy a fenti formula értéke $r = 2$ -re, vagyis a hagyományos Kneser gráfra éppen $n - 2k + 2$, ami a tanult pontos értéke a kromatikus számnak. Erdős Pál fogalmazta meg sejtésként 1973-ban (tehát még a Kneser sejtés bizonyítása előtt!), hogy talán ez az általánosabb felső korlát is pontos. És valóban így van: ezt egy 1986-ban megjelent cikkben bizonyította be Noga Alon, Frankl Péter és Lovász László. Ehhez a bizonyításhoz egy a Borsuk-Ulam tételnél általánosabb algebrai topológiai tételt használtak fel.)