Modellelmélet Feladatok, 2.

1. Igazoljuk, hogy ha I végtelen halmaz, akkor I felett $2^{2^{|I|}}$ darab páronként különböző ultraszűrő van.

2. Legyen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ nem megszámlálhatóan-teljes, jó ultraszűrő, és $f : I \to \omega$ olyan függvény, hogy minden $n \in \omega$-ra $\{i \in I : f(i) \geq n\} \in \mathcal{F}$. Igazoljuk, hogy van olyan $E \subseteq \mathcal{F}$ halmazrendszer, melyre teljesül, hogy $|E| = |I|$ és minden $i \in I$-re

$$|\{e \in E : i \in e\}| \leq f(i)$$

(azaz E nemcsak, hogy pontvéges, hanem I minden i elemét legfeljebb $f(i)$-szer fedi le).

3. Legyen T a végpontok nélküli sűrű, lineáris rendezések elmélete, $\Delta = \{u \leq v\}$, λ végtelen szinguláris számosság. Igazoljuk, hogy ha az $\mathcal{A} \in Mod(T)$ struktúra λ-szaturált, és $X \subseteq A, |X| \leq \lambda$ akkor X felett minden Δ-típus realizálható $\mathcal{A}$-ban (azaz $\mathcal{A}$ λ^+-szaturált a Δ-típusokra nézve).

Megjegyzés: $\mathcal{A}$ valójában λ^+-szaturált, mert $\mathcal{A}$-ban minden formula ekvivalens egy kvantormentessel, de ezt nem kell belátni.

4. Legyen $L = \{f\}, L' = \{f, +\}$, ahol f 1-változós, $+$ pedig 2-változós függvényszimbólum. Legyen $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}, +^{\mathcal{A}} \rangle$, ahol $f^{\mathcal{A}}(x) = x + 1$, és $+^{\mathcal{A}}$ az egész számok szokásos összeadása. Legyen $T = Th(\mathcal{A})$. Igazoljuk, hogy T-ben $+$ nem definiálható expliciten L felett.

2025 Március.