Matematikai Logika Feladatok, 5.

1. Legyen $f : \omega \to \omega$ primitív rekurzív függvny, és definiljuk a $g : \omega \to \omega$ függvényt így: $g(0) = 0$ és ha $n \in \omega, n > 0$, akkor

$$g(n) = (\underbrace{f \circ ... \circ f}_{n \text{ darab } f})(n).$$

Igazoljuk, hogy g is primitív rekurzív.

2. Igazoljuk, hogy ha φ egy Σ-formula, azaz $\varphi = (\exists x_0)(\exists x_1)...(\exists x_{n-1})\psi$, ahol ψ egy Σ_0-formula (és n lehet akármilyen nagy véges szám), akkor φ ekvivalens egy egy olyan φ' Σ-formulával, melynek legelején legfeljebb 1 egzisztenciális kvantor van (és a φ'-ben előforduló összes többi kvantor korlátos kvantor).

3. Legyen $f : \omega \to \omega$ mindenütt értelmezett függvény. Igazoljuk, hogy f akkor és csak akkor rekurzív, ha gráfja rekurzív halmaz (azaz, ha gráfjának karakterisztikus függvénye mindenütt értelmezett rekurzív függvény).

Azt, hogy egy adott függvény rekurzív, elég vázlatosan, röviden indokolni (lehet pl. a Church-tézisre hivatkozni).

Játékszabályok.
1. Lehet közösen gondolkodni, de mindenki önállóan írja le a megoldásait, miután minden részletet megértett.
2. A megoldásokat legkésőbb 2023 május 23 (csütörtök) délután 17:00-ig kell eljuttatni akár e-mail-en a sagi@renyi.hu címre, akár papíron. Mindkét esetben elég, ha kézzel írt megoldást adsz be (vagy fotózol le, és azt küldöd e-mail-en). Természetesen gépelt megoldásokat is be szabad adni.

2025 május.