Régebbi Matek B2 és B3 zh-k

Taylor-Sorokkal, Fourier-Sorokkal,
felületekkel, térgörbékkel, integrálredukcióval
kapcsolatos feladatai.

1. Határozzuk meg $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+4}}{2^n(4n+4)}\right)$ konvergencia-halmazát és összegfüggvényét.

(2006 december 13)

2. Határozzuk meg a konvergencia középpontját és sugarát: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)(z-i)^n$.

(2006 december 13)

3. Ebben a feladatban x valós változó.

(a) Határozzuk meg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^n(x)}{\sqrt{n}}$ konvergencia-halmazát.

(b) Határozzuk meg $\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$ konvergencia-halmazát és összegfüggvényét.

(2006 október 25)

4. Ebben a feladatban z komplex változó.

(a) Határozzuk meg $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}(z-i)^n$ konvergencia-középpontját és konvergencia-sugarát.

(b) Határozzuk meg $f(z)=z^2e^{3z}$ Taylor-sorát a 0 körül.

(2006 október 25)

5. Határozzuk meg a következő hatványsor összegfüggvényét és konvergenciahalmazát:

$$\sum_{n=1}^{\infty}3nx^{3n-1}.$$

(2007 december 11)

6. Legyen f az a 2π szerint periodikus valós függvény, melyre teljesül, hogy

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{ha } x \in (-\pi, 0), \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ 2 & \text{ha } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Adjuk meg f Fourier-sorát. (2007 január 5)

7. Legyen f az a 2π szerint periodikus valós függvény, melyre teljesül, hogy minden $x \in (-\pi, \pi]$-re $f(x) = sh(x)$. Adjuk meg f Fourier-sorát. (2006 december 13)

8. Legyen f az a 2π szerint periodikus valós függvény, melyre teljesül, hogy minden $x \in (-\pi, \pi]$-re $f(x) = x$. Adjuk meg f Fourier-sorát. (2006 október 25)

9. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ az a 2π szerint periodikus függvény, melyre teljesül, hogy

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [-\pi, 0), \\ 0 & \text{ha } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

Számítsuk ki f Fourier-sorában $cos(3x)$ együtthatóját.

(2007 december 11)

Görbék, Felületek

10. Adjuk meg az összes olyan pontot, mely(ek)ben az $r(t) = [t, t^2, t^4]$ görbe simulósíkja merőleges a $[0, 1, 6]$ vektorra. Az ilyen pont(ok)ban írjuk fel a görbe érintőegyenesének egyenletét is.

(2007 május 18)

11. Legyen $r : [0, \infty) \to \mathbf{R}^3$, $r(t) = \dfrac{t^3}{3}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{3}t^2}{2}\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$. Számítsuk ki r ívhosszát a $t_0 = 0$ és $t_1 = 1$ paraméterek között.

(2007 május 11)

12. Legyen $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ a következő térgörbe: $r(t) = \dfrac{t^3}{3}\mathbf{i} + \dfrac{2\sqrt{t^9}}{9}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Térjünk át ívhossz-paraméterre (a $t_0 = 0$ pontból kiindulva).

(2007 május 24)

13. Legyen $r : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ a következő felület: $r(x, y) = [2xy, 3y, x]$. Határozzuk

meg az összes olyan pontot, melyben r érintősíkja merőleges a $v = [6, -8, 12]$ vektorra.

(2007 május 30)

14. Legyen $A = \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}$. Számítsuk ki a $z = 4 + y - x^2$ felület A feletti darabjának felszínét. (A nem-algebrai függvények helyettesítési értékeit nem szükséges kiszámolni.)

(2007 május 18)

15. Adjuk meg az összes olyan pontot, mely(ek)ben a $z = 3x^2 - xy$ felület érintősíkja merőleges a $[0, 4, 2]$ vektorra.

(2007 május 11)

16. Legyen $r(t) = [t^2, \ t^2 + t, \ t]$. Mely pont(ok)ban lesz az r görbe görbülete $\sqrt{\frac{3}{2}}$?

(2007 április 27)

17. Határozzuk meg a $P \in \mathbf{R}^3$ pont hiányzó koordinátáit, ha tudjuk, hogy a második koordinátája 6, és P-ben az $r(u, v) = [2uv, \ u, \ v^2]$ felület érintősíkja párhuzamos az $[1, 0, -2]$ vektorral.

(2007 április 27)

18. Adjuk meg az összes olyan pontot, mely(ek)ben az

$$r(t) = \frac{2t^3}{3}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$$

görbe érintőegyenese párhuzamos a $2x - z = 0$ síkkal. Az ilyen pont(ok)ban írjuk fel a görbe érintőegyenesének egyenletét is.

(2008 október 20)

19. Adjuk meg az $\dfrac{1}{xyz} = 1$ egyenletű felület érintősíkját a $p = [2, \ 3, \ 1/6]$ pontban.

(2008 november 25)

20. Határozzuk meg az $x^2y + y^2z = 0$ egyenletű felület érintősíkjának egyenletét a $[2, 1, 4]$ pontban.

(2008 december 19)

21. Legyen $r(t) = [1,\ t^2/2,\ t^3/3]$. Határozzuk meg a t_0 paraméter értékét, ha tudjuk, hogy az r görbe $t = 0$ és $t = t_0$ paraméter-értékek közti részének ívhossza 10.

(2008 december 4)

22. Határozzuk meg a P pont első két koordinátáját, ha tudjuk, hogy P harmadik koordinátája 3, P benne van az $x - y^2 + z^2 = 1$ egyenletű felületben és e felület P-beli érintősíkja párhuzamos a $[0, 1, 1]$ vektorral.

(2008 december 4)

23. Legyen $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, \quad r(t) = [sin(t),\ cos(t),\ \sqrt{t^3}]$. Térjünk át ívhossz-paraméterre ($t_0 = 0$-ból kiindulva).

(2009 május 19)

24. Legyen $r(t) = [t^2,\ 3t,\ 4t]$.

(a) Adjuk meg az összes olyan pontot, mely(ek)ben r érintővektora párhuzamos az $x - 2y + 3z = 7$ egyenletű síkkal.

(b) Adjuk meg t binormális egységvektorát a $(9, 9, 12)$ pontban.

(2009 május 19)

25. Legyen $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, \quad r(t) = [2t^3, 6t^2, 3t^2]$. Adjuk meg r ívhosszát az $a = 0$ és $b = 2$ paraméterű pontok között.

(2009 május 4)

26. Legyen $r(x, y) = [x^2y,\ xy,\ x + y]$ és legyen $P = (-9,\ -3,\ 2)$.

(a) Mutassuk meg, hogy P benne van az r által paraméterezett felületben.

(b) Adjuk meg r érintősíkjának egyenletét P-ben.

(2009 május 4)

Görbementi, felületmenti integrálok

27. Legyen $f(x, y, z) = [xz^2,\ e^{xz},\ sin(xy)]$. Számítsuk ki f felületi integrálját a

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z \geq 0$$

feltételek által meghatározott, kifelé irányított, zárt felületen.

(2007 január 5)

28. Számítsuk ki $f(x, y) = [y, x^3]$ görbementi integrálját az $x^2 + y^2 = 1$ körvonalon, pozitív forgásirány mellett.

(2006 december 13)

29. Legyen $f(x, y, z) = [x \cdot cos^2(y),\ y + e^x,\ z \cdot sin^2(y)]$. Határozzuk meg f felületi integrálját azon a kifelé irányított, korlátos, zárt felületen, melyet a

$$z = e, \qquad z = e^2, \qquad x^2 + y^2 = ln(z)$$

egyenletű felületek határolnak.

(2006 október 25)

30. Legyen $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ v(x, y, z) = [xze^z, x, y^2]$ és legyen K az a kocka, melynek egyik csúcsa a $(0, 0, 0)$ pont, az ebből induló élek másik végei rendre $(2, 0, 0),\ (0, 2, 0)$ és $(0, 0, 2)$. Számítsuk ki v felületi integrálját K (kifele irányított) felületén.

(2007 december 11)

31. Legyen $\mathcal{F}$ az a kifele irányított zárt felület, melyet a $z = 0,\ z = 2,\ x^2 + y^2 = 9$ egyenletű felületek határolnak, és legyen

$$v(x, y, z) = [y^2 z,\ sin(x),\ ze^{x^2+y^2}].$$

Számítsuk ki v felületi integrálját $\mathcal{F}$-en.

(2007 április 27)

32. Legyen $\mathcal{F}$ az a kifele irányított zárt felület, melyet a $z = 1,\ z = 4,\ z^2 = x^2 + y^2$

egyenletű felületek határolnak, és legyen

$$v(x,y,z) = [ye^z, ze^x, \frac{z \cdot sin^2(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}].$$

Számítsuk ki v felületi integrálját $\mathcal{F}$-en.

(2008 november 25)

33. Legyen $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $v(x,y,z) = [-2xz, xz, 3y]$.
(a) Határozzuk meg a $rot(v)$ függvényt.
(b) Határozzuk meg a p pont első koordinátáját, ha tudjuk, hogy $rot(v)(p)$ merőleges az $[1,1,0]$ vektorra.

(2008 november 25)

34. Legyen $v(x,y,z) = [\sqrt{1-x^2}, y^2, xy]$. Számítsuk ki v görbementi integrálját az $r(t) = [sin(t), cos(t), 1]$, $0 \le t \le \pi$ görbén.

(2008 december 19)

35. Legyen $\mathcal{F}$ az kifele irányított zárt felület, melyet a

$$z = 1, \quad z = 4, \quad x^2 + y^2 = z^2$$

egyenletű felületek határolnak. Legyen $v(x,y,z) = [y^2z, xz^2, z \cdot ln(\sqrt{x^2+y^2})]$. Számítsuk ki v felületi integrálját $\mathcal{F}$-en.

(2008 december 19)

36. Legyen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ismeretlen függvény, és legyen $v(x,y,z) = [ze^{2y}, xz^2, f(y,z)]$.
(a) Határozzuk meg f-t, ha $rot(v)$ első koordinátája $e^{sin(y)}cos(y) - 2xz$.
(b) Határozzuk meg $rot(v)$-t.

(2008 december 4)

37. Legyen $\mathcal{F}$ az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű, pozitív irányítású görbe és legyen $v : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $v(x,y) = [yx^2, y^2]$. Számítsuk ki v görbementi integrálját $\mathcal{F}$-en.

(2008 december 4)

38. Legyen $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $v(x,y,z) = [x^2z, e^yz, z^2x]$. Számítsuk ki a $div(rot(v))$

függvényt.

(2008 december 4)

39. Legyen $\mathcal{F}$ az a kifele irányított, korlátos zárt felület, melyet a

$$z = 1,\ z = 4,\ z^2 = 4x^2 + 4y^2$$

egyenletű felületek határolnak, és legyen

$$v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \qquad v(x, y, z) = [e^y,\ \sqrt{x},\ xy^2 z].$$

Számítsuk ki v felületi integrálját $\mathcal{F}$-en.

(2009 május 19)

40. Legyen $\mathcal{F}$ az a kifele irányított, korlátos zárt felület, melyet a

$$z = 0,\ z = 4,\ z^2 = x^2 + y^2$$

egyenletű felületek határolnak, és legyen

$$v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \qquad v(x, y, z) = [xy^2, y^3, zy^2].$$

Számítsuk ki v felületi integrálját $\mathcal{F}$-en.

(2009 május 4)