

Tetszőleges A mátrix Moore-Penrose inverzét A^+ jelöli.

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
 - (a) Számoljuk ki A^+ -t úgy, hogy megoldjuk a normálegyenleteket a két sztenderd bázisvektorra, mint jobboldalakra.
 - (b) Számoljuk ki A^+ -t a teljes oszloprangú mátrixok Moore-Penrose inverzére vonatkozó képlettel.
2. Igazoljuk, hogy ha A négyzetes, invertálható mátrix, akkor $A^+ = A^{-1}$.
3. Legyen A tetszőleges (nem feltétlenül négyzetes) mátrix. Igazoljuk, hogy
 - (a) Ha B Moore-Penrose inverze A -nak, akkor A Moore-Penrose inverze B -nek.
 - (b) $(A^+)^+ = A$.

Azonosítsuk az $(n \times m)$ -es mátrixok $\mathbb{R}^{n \times m}$ vektorterét az $(n \cdot m)$ -es vektorok $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ vektorterével a szokásos módon. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrix hossza az $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ -beli természetes hosszúságfogalomból adódik:

$$|A| = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2},$$

melyet szokás A Frobenius-normájának is nevezni. A következő feladatban azt látjuk be, hogy AA^+ a lehető legközelebb van I_n -hez (a Frobenius-norma szerint).

4. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tetszőleges mátrix. Keressük azokat az $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixokat, melyekre AX "majdnem az egységmátrix" abban az értelemben, hogy $h = |I_n - AX|$ a lehető legkisebb. (Ha A invertálható, akkor persze $X = A^{-1}$ jó, és ekkor az előbbi h -ra $h = 0$. Az alábbi lépésekben belátjuk, hogy tetszőleges A -ra $X = A^+$ adja a minimumot).
 - (a) Igazoljuk, hogy $|I_n - AX|^2 = \sum_{j=1}^n |\underline{e}_j - AX_{*j}|^2$.
 - (b) Gondoljuk meg, hogy $|\underline{e}_j - AX_{*j}|^2$ mikor minimális.
 - (c) Az előző részfeladatok alapján igazoljuk, hogy AA^+ a lehető legközelebb van I_n -hez abban az értelemben, hogy $|I_n - AA^+|$ a lehető legkisebb (a Frobenius-norma szerint).
 - (d) Általában több olyan X mátrix van, melyre $|I_n - AX|$ minimális; igazoljuk, hogy ezek közül A^+ az az X , melynek Frobenius-normája a lehető legkisebb.
5. Legyenek $\underline{a} = (1, 1, 0, 1)$, $\underline{b} = (0, -1, 2, 1)$, $\underline{c} = (0, 1, 0, 0)$, $\underline{d} = (0, 0, 0, 1)$ és legyenek $V = \text{span}\{\underline{a}, \underline{b}\}$, $W = \text{span}\{\underline{c}, \underline{d}\}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^4$ -ben V és W direkt kiegészítők. Adjuk meg a V -re való W irányú vetítés mátrixát a sztenderd bázisban.
6. Legyen F az összes valós-valós függvények vektortere $\mathbb{R}$ felett. Legyenek

$$V = \{f \in F : f \text{ páros függvény}\}, \quad W = \{f \in F : f \text{ páratlan függvény}\}.$$

Mutassuk meg, hogy F -ben a V és W alterek direkt kiegészítők.

7. Legyen $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ összes olyan W alterét, mely direkt kiegészítője V -nek $\mathbb{R}^3$ -ben.
8. Legyenek

$$K = \{s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid s \text{ konvergens}\}, \quad C = \{s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid s \text{ konstans}\}, \quad N = \{s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0\}.$$
 Mutassuk meg, hogy K -ban C és N direkt kiegészítői egymásnak.