

1. Legyen $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ és legyen v_α az az egységnyi hosszúságú vektor a síkon, mely az x -tengely pozitív félegyeneseivel α szöget zár be. Legyen $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a v_α irányú vetítés az $y = -x$ altérre (tehát $\varphi(u)$ az u -n átmenő, v_α irányvektorú vetítési egyenes metszéspontja az $y = -x$ egyenletű egyenessel, mint altérrel).
 - (a) Írjuk fel φ_α mátrixát a sztenderd bázisban.
 - (b) Adjuk meg a $\text{Ker}(\varphi_\alpha)$ és $\text{Im}(\varphi_\alpha)$ altereket.
 - (c) Számítsuk ki a $[6, 18]$ vektor $\varphi_{\frac{\pi}{3}}$ szerinti képét.
 - (d) Mely α értékekre lesz az (a) pontban megadott mátrix szimmetrikus?
 - (e) Legyen $\mathcal{B} = \{[1, -1], [1, 1]\}$. Írjuk fel $\varphi_{\frac{\pi}{4}}$ mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban.
 2. Az $x + z = 3$, $x + y + 2z = 2$, $x + z = 2$ ellentmondásos lineáris egyenletrendszer normálegyenletét megoldva adjuk meg az összes optimális közelítő megoldást. Adjuk meg a minimális hosszúságú optimális közelítő megoldást is.
 3. Legyen $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ (n értékére alább adunk korlátozásokat). Az egyelőre ismeretlen $a_0, \dots, a_n$ együtthatókra írjunk fel (esetleg ellentmondásos) lineáris egyenletrendszereket az alábbiak szerint (mindig a másodfokú $g(x) = x^2$ -et szeretnénk alacsonyabbfokú polinomokkal közelíteni néhány pontban úgy, hogy a helyettesítési értékek vektorai a lehető legközelebb legyenek egymáshoz).
 - (a) $\deg(f) = 0$ és az $[f(1), f(2)]$ vektor a lehető legközelebb van a $[g(1), g(2)]$ vektorhoz (különbségük hossza minimális).
 - (b) $\deg(f) = 0$ és az $[f(2), f(3)]$ vektor a lehető legközelebb van a $[g(2), g(3)]$ vektorhoz.
 - (c) $\deg(f) \leq 1$ és az $[f(1), f(2), f(3)]$ vektor a lehető legközelebb van a $[g(1), g(2), g(3)]$ vektorhoz.
 - (d) $\deg(f) \leq 2$ és az $[f(1), f(2), f(3)]$ vektor a lehető legközelebb van a $[g(1), g(2), g(3)]$ vektorhoz (sőt, egyenlő vele, Lagrange-interpoláció, Vandermonde-mátrix!)
 - (e) $\deg(f) \leq 3$ és az $[f(1), f(2), f(3)]$ vektor a lehető legközelebb van a $[g(1), g(2), g(3)]$ vektorhoz (sőt, egyenlő vele, végtelen sok ilyen f van).
- Az előző egyenletrendszerek közül néhánynak írjuk fel a normálegyenletét, és oldjuk is meg.
4. Legyen $W \subseteq \mathbb{R}^n$ egy altér. Idézzük fel, gondoljuk meg a következőket.
 - (a) A $W^\perp = \{a \in \mathbb{R}^n : a \perp W\}$ vektorhalmaz szintén altere $\mathbb{R}^n$ -nek.
 - (b) $(W, W^\perp)$ direkt-felbontása $\mathbb{R}^n$ -nek.
- Definíció.** Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix ortogonális projekció a $W \subseteq \mathbb{R}^n$ altérre, ha minden $w \in W$ -re $Aw = w$ és minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re $(x - Ax) \perp W$.
5. Igazoljuk, hogy ha A ortogonális projekció W -re, akkor az $I_n - A$ mátrix ortogonális projekció $W^\perp$ -re (ahol I_n a megfelelő egységmátrix).
-

6. Az (1) feladatot folytatva, $\varphi_{\frac{\pi}{3}}$ mátrixát is írjuk fel $\mathcal{B}$ -ben. Adjuk meg a sztenderd bázisról a $\mathcal{B}$ -re áttérés T mátrixát. Legyen $\tilde{A}$ az a mátrix, amit az (a) pont szerint kaptunk az $\alpha = \frac{\pi}{4}$ esetben, és legyen $\tilde{B}$ az a mátrix, amit az (e) pontban kaptunk. Ellenőrizzük, hogy $\tilde{B} = T^{-1}AT$ tényleg teljesül.
7. A 3. feladatban oldjunk meg minél több ellentmondásos egyenletrendszert.
8. Legyen $g(x) = x^3 \in \mathbb{R}[x]$. A 3. feladathoz hasonlóan, határozzuk meg azt a legfeljebb másodfokú f polinomot, melyre az $[f(1), f(2), f(3), f(4)]$ vektor a lehető legközelebb van a $[g(1), g(2), g(3), g(4)]$ vektorhoz.