

1. Határozzuk meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét:
(a) $2^{23}3^{10}7^{13}$, $2^{15}7^{10}13^5$.
(b) $2^{23}3^{10}7^{13}$, $2^{15}7^{10}13^5$, $3^{15}7^{20}11^2$.

2. Hány nullára végződik a $100!$ szám?

3. Mutassuk meg, hogy
(a) $4k + 1$ alakú számok szorzata $4k + 1$ alakú;
(b) végtelen sok $4k + 3$ alakú prímszám van!
(Útmutatás: Milyen prímosztói lehetnek a $4n! - 1$ számnak?).

4. Bizonyítsuk be, hogy minden $a, m, n \in \mathbb{N}$, $a > 1$ esetén $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.
(Útmutatás: teljes indukció.)

5. Határozzuk meg $2^{67} \pmod{71}$ értékét.

6. Oldjuk meg a következő lineáris kongruenciákat!

- (a) $12x \equiv 15 \pmod{21}$,
(b) $12x \equiv 4 \pmod{6}$,
(c) $12x \equiv 4 \pmod{2}$,
(d) $30x \equiv 4 \pmod{37}$.

7. (a) Határozzuk meg $5^{-1} \pmod{26}$ értékét!
(b) Invertálható-e 4 modulo 26?

8. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x \equiv 3 \pmod{8}, \quad x \equiv 4 \pmod{11}.$$

9. Hányféle különböző módon lehet 2450-et 3 természetes szám szorzatára úgy felbontani, hogy mindegyik tényező legalább 2 legyen? Soroljuk fel az összes lehetőséget.

-
10. - Három elefántot kell majd elszállítanunk - mondta a kapitány.

- Hány évesek az elefántok? kérdezte az elsőtiszt.
- Mindegyikük legalább 2 éves, és életkoraik szorzata 2450.
- Mennyi az életkoraik összege?
- Azt nem mondom meg, mert abból még nem tudnád meg, hogy milyen idősök, (*)
de azt elárulom, hogy az egyikük idősebb, mint én - szólt a kapitány. (**).
- Akkor tudom már az elefántok életkorát - mondta az elsőtiszt. (***)
Hány éves a kapitány?

Útmutatás:

- (a) a 9. feladatot felhasználva soroljuk fel az összes lehetőséget, ahogy 2450-et 3 tényező szorzatára lehet bontani úgy, hogy mindegyik tényező legalább 2;
(b) az egyes esetekben adjuk össze a 3 tényezőt, és gondoljuk meg, hogy (*) miatt azok az esetek kizárhatók, melyekben ez az összeg semelyik másik esetben nem fordul elő (2 lehetőség marad);
(c) gondoljuk meg, hogy (**) miatt a kapitány kevesebb, mint 50 éves;
(d) gondoljuk meg, hogy (***) miatt a kapitány több, mint 48 éves.