

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Add meg az összes olyan A mátrixot, melyre $A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A6;(Feb. 23)

Az egyik Moore-Penrose axióma alapján: $A = A \underbrace{A^+ A}_{=0 \text{ mert } A^+=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Legyen V a lefeljebb 2026-odfokú \mathbb{R} feletti polinomok vektortere és legyen $\varphi : V \rightarrow V$ az a lineáris leképezés, melyre teljesül, hogy minden $p \in V$ -re:

$$\deg(\varphi(p)) \leq 2 \quad \text{és} \quad p(1) = \varphi(p)(1), \quad p(2) = \varphi(p)(2), \quad p(3) = \varphi(p)(3).$$

Igazold, hogy van olyan $B \subseteq V$ bázis, melyre $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mennyi r értéke? B2;(Feb. 26)

Mivel minden $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ -hoz pontosan egy olyan $p \in \mathbb{R}[x]$ van, melyre

$$(\deg(p) \leq 2, \quad p(1) = a_1, \quad p(2) = a_2, \quad p(3) = a_3)$$

ezért φ idempotens (vetítés) \rightsquigarrow van a feladatnak megfelelő B és $r = \dim(\text{Im}(\varphi)) = 2$.

3. Add meg mátrixegyütthatós polinomként: $\begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda & 5 & 2\lambda^2 \\ -7\lambda & 1 & \lambda + 1 \\ \lambda & 3\lambda^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}$. D5;(Márc. 19)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Diagonalizálható-e az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix? D10;(márc. 30) vagy akár C6;(Márc. 5)

1. megoldás: Nem diagonalizálható, mert A sajátmaga egyetlen (nemdiagonális) Jordan-blokk \rightsquigarrow Jordan-féle normálalakban van.

2. megoldás: Nem diagonalizálható, mert egyetlen sajátértékének ($\lambda = 1$ -nek) algebrai és geometriai multiplicitása nem egyenlő (λ algebrai multiplicitása 2, geometriai multiplicitása 1).

5. Hasonlóság erejég hány olyan valós 7×7 -os valós mátrix van, melynek minimálpolinomja $m(x) = x^2(x - 2)^3$? D11;(Ápr. 13)

Mivel a karakterisztikus polinom és a minimálpolinom gyökei azonosak, ezért a sajátértékek algebrai multiplicitásaira (a karakterisztikus polinomban) az alábbi 3 lehetőség van.

1. eset: 0 algebrai multiplicitása 4, 2 algebrai multiplicitása 3 \rightsquigarrow Jordan-blokkok $J_2(0), J_2(0), J_3(2)$, vagy $J_2(0), J_1(0), J_1(0), J_3(2)$ ez 2 lehetőség;

2. eset: 0 algebrai multiplicitása 3, 2 algebrai multiplicitása 4 \rightsquigarrow Jordan-blokkok $J_2(0), J_1(0), J_3(2), J_1(2)$

¹A kérdések után X;(Y,Z) azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) lehetne tudni a választ.

ez 1 lehetőség;

3. eset: 0 algebrai multiplicitása 2, 2 algebrai multiplicitása 5 \rightsquigarrow Jordan-blokkok $J_2(0), J_3(2), J_2(3)$, vagy $J_2(0), J_3(2), J_1(2), J_1(2)$ ez 2 lehetőség;

Összesen 5 lehetőség van.

6. Ortogonális-e a $Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix? E5;(Ápr. 20)

Igen: az oszlopok hossza 1 (pl. az 1. oszlop hossza $\frac{1}{3}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 1$). Hasonlóan, a páronként különböző oszlopok skaláris szorzata 0 \rightsquigarrow ortogonálisak egymásra.

7. Legyenek $\underline{a} = (1, 1, 1)$, $\underline{b} = (1, 2, 3)$. Van-e olyan **szimmetrikus** $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix, melyre $\underline{a} \in \ker(A)$ és $A\underline{b} = \underline{b}$? E8;(Ápr. 30)

A feladat alapján \underline{a} 0-hoz tartozó sajátvektor, és \underline{b} 1-hez tartozó sajátvektor. Mivel szimmetrikus mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai ortogonálisak egymásra, de $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle \neq 0 \rightsquigarrow \underline{a} \not\perp \underline{b} \rightsquigarrow$ nincs megfelelő szimmetrikus A .

8. Add meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix QR-felbontását. F2;(Máj. 11)

Givens-forgatással nullázzuk ki az 1. oszlop 2. elemét \rightsquigarrow olyan α kell, hogy $\sin(\alpha) = -\cos(\alpha)(-1)$

azaz $\sin(\alpha) = \cos(\alpha) \rightsquigarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$. Szorozzuk A -t $G_{12}(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ -al:

$$G_{12}\left(\frac{\pi}{4}\right)A = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R \text{ ez felső háromszög}} \rightsquigarrow A = G_{12}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1}R.$$

Tehát $Q = G_{12}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1} \stackrel{G_{12}(\dots) \text{ ortog.}}{=} G_{12}\left(\frac{\pi}{4}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Igazold, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ felső háromszög, akkor e^A is felső háromszög². G1-3;(Máj. 21)

Tanultuk: van olyan $r \in \mathbb{R}[x]$, hogy $e^A = r(A)$. Mivel felső háromszögmátrixok szorzatai, számszorosai, összegei felső háromszögek maradnak $\rightsquigarrow r(A)$ felső háromszög marad.

10. Röviden írd le a hibajavító kódok kapcsolatát a lineáris algebrával. (Máj. 27)

Egy véges test elemeiből képzett véges \underline{a} sorozatot küldünk, de az átvitel során \underline{a} egyes karakterei torzulhatnak. Ezért rögzítünk egy kódoló A és egy dekódoló B mátrixot és \underline{a} helyett (a hosszabb) $\underline{b} = A\underline{a}$ kódolt üzenetet küldjük, a címzett pedig a $B\underline{b}$ dekódolt üzenetet fogja helyesnek elfogadni. Az A, B mátrixokat meg lehet úgy választani, hogy \underline{b} ne legyen sokkal hosszabb, mint \underline{a} és a címzett felismerje és javítani is tudja, ha az átvitel során csak kevés karakter torzult el.

²A megoldáshoz nem feltétlenül szükséges, de a teljesség kedvéért: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.