Bevezetés az Algebrába 2 **Vizsga írásbeli része** **2026 jun. 12.**

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Add meg az összes olyan A mátrixot, melynek Moore-Penrose inverze $A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Legyen V a lefeljebb 2026-odfokú $\mathbb{R}$ feletti polinomok vektortere és legyen $\varphi : V \to V$ az a lineáris leképezés, melyre teljesül, hogy minden $p \in V$-re:
$$deg(\varphi(p)) \leq 2 \quad \text{és} \quad p(1) = \varphi(p)(1), \quad p(2) = \varphi(p)(2), \quad p(3) = \varphi(p)(3).$$
Igazold, hogy V-nek van olyan B bázisa, melyre $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mennyi r értéke?

3. Add meg mátrixegyütthatós polinomként: $\begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda & 5 & 2\lambda^2 \\ -7\lambda & 1 & \lambda + 1 \\ \lambda & 3\lambda^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Diagonalizálható-e az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix?

5. Hasonlóság erejég hány olyan valós 7×7-os valós mátrix van, melynek minimálpolinomja $m(x) = x^2(x-2)^3$?

6. Ortogonális-e a $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix?

7. Legyenek $\underline{a} = (1,1,1)$, $\underline{b} = (1,2,3)$. Van-e olyan **<u>szimmetrikus</u>** $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix, melyre $\underline{a} \in ker(A)$ és $A\underline{b} = \underline{b}$?

8. Add meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix QR-felbontását.

9. Igazold, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ felső háromszögmátrix, akkor e^A is felső háromszögmátrix[1].

10. Röviden írd le a hibajavító kódok kapcsolatát a lineáris algebrával.

[1] A megoldáshoz nem feltétlenl szükséges, de a teljesség kedvéért: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.