

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$ (világos, hogy φ lineáris). Legyen $\underline{b}_1 = (1, 1, 0)$, $\underline{b}_2 = (1, 0, 1)$, $\underline{b}_3 = (0, 1, 1)$, és legyen $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$.

- (a) Add meg φ mátrixát a sztenderd bázisban.
- (b) Add meg φ mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban.
- (a) Add meg a sztenderd bázisról a $\mathcal{B}$ -re áttérés mátrixát.

2. Egy ismeretlen 2-változós $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ függvény értékét két alkalommal is megmérték 2-2 pontban. Először azt találták, hogy $f(1, 1) = 1$, $f(2, 1) = 3$, másodszor pedig azt, hogy $f(1, 1) = 2$, $f(2, 1) = 4$. Az a, b, c paramétereket úgy szeretnénk választani, hogy a $g(x, y) = ax + by + c$ függvény értékei legjobban közelítsék a mérési eredményeket, azaz úgy, hogy a

$$[g(1, 1), g(1, 1), g(2, 1), g(2, 1)] \text{ és } [1, 2, 3, 4]$$

vektorok a lehető legközelebb legyenek egymáshoz (különbségük h hossza legyen minimális).

- (a) A megfelelő ellentmondásos lineáris egyenletrendszer normálegyenletét megoldva add meg az a, b, c paraméterek összes lehetséges értékét, melyekre h minimális.
- (b) Add meg azt az (a, b, c) -t, mely eleget tesz az (a) pontnak, és $|(a, b, c)|$ a lehető legkisebb. Lineáris algebrai módszereket használj (kalkulusból tanult szélsőérték-tételeket most ne használj).

A menet közben előálló számok nem feltétlenül maradnak szépek!

3. Egy $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrixot v bővös összegű bővös négyzetnek nevezünk, ha sorai, oszlopai, és átlói összege ugyanaz a v szám (de A elemei bármilyen valós számok, akár negatív, vagy akár irracionális számok is lehetnek). A bővös négyzetek halmazát jelölje $\mathcal{B}$.

- (a) Mutasd meg, hogy $\mathcal{B}$ altere $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ -nek.
- (b) Legyen $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^8$, $L(A) = [s_1, s_2, s_3, o_1, o_2, o_3, t_1, t_2]$, ahol s_1, s_2, s_3 az A mátrix 3 sorának, o_1, o_2, o_3 a három oszlopának és t_1, t_2 a két átlójának összege. Add meg $\text{Ker}(L)$ -t és $\text{Im}(L)$ -t.
- (c) Add meg $\dim(\mathcal{B})$ -t, azaz a bővös négyzetek vektorterének dimenzióját.

4. Igazold, hogy ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra $A^T = A$ és $A^2 = A$, akkor A az $\mathcal{O}(A)$ -ra való ortogonális projekció mátrixa, azaz minden $\underline{w} \in \mathcal{O}(A)$ -ra $A\underline{w} = \underline{w}$ és minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ -re $(\underline{x} - A\underline{x}) \perp \mathcal{O}(A)$.