

Bevezetés az Algebrába 1 Vizsga írásbeli része MEGOLDÁSOKKAL¹ 2025 dec. 19.

1. Add meg az összes olyan pozitív egész u számot (ha vannak ilyenek egyáltalán), melyekre a

$$9 \cdot 2^{3u^2+1}x + 5 \cdot 2^{2u^2}y = 25 \cdot 16^u$$

diofantoszi egyenletnek van megoldása. (A2/4 (szept. 15-19).)

Pontosan akkor van megoldás, ha $(9 \cdot 2^{3u^2+1}, 5 \cdot 2^{2u^2}) | 25 \cdot 16^u$ azaz $2^{u^2} | 2^{4u}$ azaz $2u^2 \leq 4u$ azaz (mivel a feladat szövege alapján $u \neq 0$ pozitív egész) $0 < u \leq 2$ azaz $u = 1$ vagy $u = 2$.

2. Add meg az összes olyan z komplex számot, melyekre teljesül, hogy $z^2 = |z|^2$. (B/1 (okt. 3).)

1. megoldás. $z = 0$ nyilván jó. Ha $z \neq 0$, akkor, mivel $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, a feladatban szereplő egyenletet $z \neq 0$ -val osztva a $z = \bar{z}$ egyenletet kapjuk, melynek pontosan a valós számok a megoldásai. Mivel 0 is valós, azt kaptuk, hogy a megoldások halmaza $\mathbb{R}$.

2. megoldás. Keressük z -t $z = a + ib$ alakban (a és b egyelőre ismeretlen valós számok). Mivel $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ és $|z|^2 = a^2 + b^2$, ezért feladatunk az $a^2 - b^2 + 2abi = a^2 + b^2$ egyenlet megoldása. Rendezve az $abi = b^2$ egyenletet kapjuk. A jobboldal valós, a baloldal csak akkor, ha $a = 0$ vagy $b = 0$. Ha $a = 0$, visszahelyettesítés mutatja, hogy akkor $b = 0$. Ha $b = 0$, akkor a bármi lehet. Azt kaptuk, hogy a bármi lehet és $b = 0$, tehát z megoldás $\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

3. Legyen R kommutatív, nullosztómentes gyűrű. Igazold, hogy az R feletti kétváltozós polinomok $R[x, y]$ gyűrűje nullosztómentes. (C1/1 (okt. 10).)

Tanultuk, hogy kommutatív, nullosztómentes gyűrű feletti polinomgyűrű kommutatív, nullosztómentes, ezt 2-szer alkalmazva:

R kommutatív, nullosztómentes $\Rightarrow R[x]$ kommutatív, nullosztómentes $\Rightarrow R[x, y]$ (kommutatív) nullosztómentes.

4. Legyen K test, $f \in K[x]$ tetszőleges polinom. Igazold, hogy $(f(x^2))' = 2x \cdot f'(x^2)$ (a vessző a deriválást jelöli). (D/3 (okt. 20-27).)

Vegyük fel f együtthatóit: $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Ekkor $f(x^2) = \sum_{k=0}^n a_k x^{2k}$, ezért

$$(f(x^2))' = \left(\sum_{k=0}^n a_k x^{2k} \right)' = \sum_{k=0}^n 2k \cdot a_k x^{2k-1} = 2x \sum_{k=0}^n k \cdot a_k x^{2k-2} = 2x \sum_{k=0}^n k \cdot a_k x^{2(k-1)} = 2x \cdot f'(x^2).$$

Az nem jó, ha a kalkulusból tanult Lánc-szabályra hivatkozol, mert K nem feltétlenül a valós test.

5. Irreducibilis-e $\mathbb{Z}$ felett az $f(x) = x^3 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ polinom? (D/2 és D/6 (okt. 20-27).)

$\deg(f) = 3$ ezért $\mathbb{Q}$ felett akkor és csak akkor irreducibilis, ha nincs gyöke $\mathbb{Q}$ -ban. A Rolle-féle gyökteszt alapján csak a ± 1 racionális gyökök jönnek szóba, behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezek egyike sem gyök. Ezért f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és így irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett is.

6. Add meg a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának mátrixrangos feltételét (az alapmátrix és kibővített mátrix rangjai alapján mikor nincs, mikor van pontosan 1, mikor van több megoldás?) (E1/3 (nov. 14).)

¹A kérdések után X;(Y,Z) azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) lehetne tudni a választ.

- (a) $Ax = b$ megoldható $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$;
- (b) Ha $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) < \text{változók száma}$, akkor sok megoldás van;
- (c) Ha $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = \text{változók száma}$, akkor pontosan 1 megoldás van;
- (d) Nem fordulhat elő, hogy $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) > \text{változók száma}$, mert $\text{rang}(A) = \dim(\mathcal{O}(A)) \leq \text{oszlopok száma} = \text{változók száma}$.

7. Mennyi az inverziószáma az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

permutációnak? (E2/6 (nov. 3 vagy nov. 17).)

Inverziók: $(2, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, tehát összesen 4 darab inverzió van.

8. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Add meg A egy LU -felbontását. (E3/11 (dec. 1).)

A -t azzal az egyetlen elemi sorátalakítással felső háromszögmátrixá lehet alakítani, hogy az első sor 2-szeresét levonjuk a másodikból. Ezt a sorátalakítást A -n és I_2 -n (a (2×2) -es egység-mátrixon) is végrehajtva (az eredményeket U -val és J -vel jelölve), majd invertálva azt kapjuk, hogy

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ebből} \quad L = J^{-1} = \frac{1}{\det J} J^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mivel a fenti mátrixokkal $JA = U$, ezért $A = J^{-1}U = LU$ a kívánt felbontás.

9. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ az y -tengelyre való tükrözés. Add meg φ és $\varphi \circ \varphi$ mátrixát a sztenderd bázisban. (E1/5 (nov. 17, vagy akár dec. 5).)

Mivel $[\varphi]$ -nek (φ mátrixának) az oszlopai a sztenderd bázis vektorainak φ szerinti képei, és

$$\varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

ezért $[\varphi] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Mivel $\varphi \circ \varphi$ az identitásfüggvény, ezért $[\varphi \circ \varphi] = I_3$ (egység-mátrix),

vagy használhatod azt is, hogy $[\varphi \circ \varphi] = [\varphi]^2$.

10. Hány darab olyan legfeljebb harmadfokú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom van, melyre $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$? (E3/10 (nov. 26).)

Három feltételen legfeljebb másodfokú interpoláló polinomból pontosan 1 darab van, de itt a harmadfokúakat kell összeszámolnunk! Lagrange interpolációs tétele szerint minden $s \in \mathbb{R}$ -hez pontosan 1 darab olyan legfeljebb 3-adfokú $f_s \in \mathbb{R}[x]$ van, melyre $f_s(0) = s$, $f_s(1) = 1$, $f_s(2) = 4$, $f_s(3) = 9$. Ezek az f_s -ek páronként különböznek (hisz 0-ban eltér a helyettesítési értékük), de a feladat szövegében szereplő feltételeknek mind eleget tesz. Továbbá, ha egy legfeljebb harmadfokú g eleget tesz a feladat feltételeinek, akkor g valamelyik f_s (konkrétan az $s = g(0)$ -hoz tartozó f_s). Tehát annyi legfeljebb harmadfokú polinom tesz eleget a feladat előírásainak, ahány módon a valós s paramétert választhatjuk. Ez végtelen sok lehetőség².

²Csokiért: sőt, a lehetőségek számossága $|\mathbb{R}|$ =kontínuum.