

Minden választ indokolj, és - ahol ez szóbajön - add meg az összes mellékszámítást is.

1. Adj meg 3 négyzetszámot úgy, hogy semelyik kettő ne legyen relatív prím, de a 3 számnak ne legyen 1-nél nagyobb abszolútértékű közös osztója. (A2/6 (Szept. 22-26).)

$$\text{Pl. } n_1 = 2^2 3^2 = 36, \quad n_2 = 2^2 5^2 = 100, \quad n_3 = 3^2 5^2 = 225.$$

2. Add meg a redukált maradékrendszerek definícióját (A2/7 (Szept. 26)).

$\{t_1, \dots, t_k\}$ redukált maradékrendszer mod m , ha minden $i, j \leq k$ -ra

- $(t_i, m) = 1$;
- ha $i \neq j$, akkor $t_i \not\equiv t_j \pmod{m}$ és
- $k = \varphi(m)$.

3. A komplex számsík egy szabályos háromszögének az egyik csúcsa a 0 (origó), másik csúcsa $1 - \sqrt{3}i$. Mi lehet a szabályos háromszög harmadik csúcsa? (B/2, (Okt. 3-6).)

A háromszög 3. csúcsát úgy kapjuk, hogy a $z = 1 - \sqrt{3}i$ -nek megfelelő pontot az origó körül 60° -al elforgatjuk. Két lehetőség van aszerint, hogy az óramutató járásának megfelelő, vagy ellentétes irányban forgatunk. Legyen $\varepsilon = \cos(60^\circ) + i \cdot \sin(60^\circ) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. A pozitív irányú forgatás az ε -al való szorzásnak felel meg, a negatív irányú forgatás pedig az $\varepsilon^5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ -vel való szorzás. Ezeknek megfelelően a két lehetőség

$$\varepsilon \cdot z = 2 \quad \text{illetve} \quad \varepsilon^5 \cdot z = -1 - \sqrt{3}i.$$

4. Legyen $f(x, y) = \det \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$. Szimmetrikus polinom-e f ? (C2/7, (Okt. 17-18).)

1. Megoldás: Ha x, y -t felcseréljük, akkor a megadott mátrix sorai felcserélődnek, ezért determinánsa -1 -el szorozódik. Ezért $f(y, x) = -f(x, y)$. Ha f szimmetrikus volna, akkor ebből $f(x, y) = -f(x, y)$, azaz $f(x, y) = 0$ következne. De $f(x, y) \neq 0$ (mert a megadott mátrix sorai lineárisan függetlenek), ezért f nem szimmetrikus polinom.

2. Megoldás: A determinánst kifejtve $f(x, y) = x^2 - y^2$. Ebből is látszik, hogy $f(y, x) \neq f(x, y)$, tehát f nem szimmetrikus polinom.

5. Igaz-e, hogy ha az $f \in \mathbb{C}$ polinomnak minden együtthatója tisztán képzetes szám², és az $u \in \mathbb{C}$ komplex szám gyöke f -nek, akkor $\bar{u}$ is gyöke f -nek? (B/1, (Okt. 3).)

Legyen $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$. Mivel mindegyik a_k tisztán képzetes, ezért $\bar{a}_k = -a_k$. Ezt azzal kombinálva, hogy a konjugálás automorfizmus, $\bar{u}$ -t f -be helyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$f(\bar{u}) = \sum_{k=0}^n a_k (\bar{u})^k = \sum_{k=0}^n \overline{-a_k(u)^k} = -\sum_{k=0}^n \overline{a_k(u)^k} = \overline{-f(u)} = \overline{-0} = 0,$$

azaz $\bar{u}$ valóban gyöke f -nek.

6. Lehet-e racionális gyöke egy egész-együtthatós, harmadfokú primitív polinomnak? (D/6, (Okt. 31).)

Lehet, pl. $f(x) = x^3$ egész-együtthatós, harmadfokú primitív polinom, melynek $0 \in \mathbb{Q}$ gyöke.

¹A kérdések után X;(Y,Z) azt jelenti, hogy a vizsgakérdések jegyzékének X. pontja ismeretében (az Y. hónap Z. napján tartott előadás alapján) lehetne tudni a választ.

²Egy komplex szám tisztán képzetes, ha valós része 0.

7. Add meg a vektorterek definícióját. (E1/1, (Nov. 3).)

Ha K egy test, $\langle V, + \rangle$ Abel-csoport, továbbá $\cdot : K \times V \rightarrow V$ olyan függvény (művelet), hogy minden $\alpha, \beta \in K$ -ra és minden $u, v \in V$ -re

- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
- $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;
- $1u = u$.

8. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Van-e olyan $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrix, melyre teljesül, hogy $A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$? (E2/8, (Nov. 24).)

$\det(A) = \det(A^T) = 0$, ezért a determinánsok szorzástétele miatt minden B -re

$$\det(A^T B) = \det(A^T) \det(B) = 0.$$

Viszont $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$, ezért nincs olyan B , amelyre teljesülne a feladatban előírt egyenlőség.

* * * * *

9. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ az xy -síkra való tükrözés. Add meg φ mátrixát a

$$\underline{b}_1 = [1, 1, 0], \quad \underline{b}_2 = [1, -1, 1], \quad \underline{b}_3 = [0, 1, 0]$$

vektorok által alkotott bázisban. (Nov. 26).

φ mátrixa a sztenderd bázisban: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Az áttérés mátrixa $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A keresett mátrix $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Az $f \in \mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú polinomra teljesül, hogy $f(1) = -1$, $f(2) = 7$, $f(-1) = 13$. Határozd meg $f(3)$ értékét. (E+/10, (Nov. 26-Dec. 1).)

Keressük f -t $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakban. A feltételek szerint f egyelőre ismeretlen együtthatóira teljesül, hogy

$$a + b + c = -1, \quad 4a + 2b + c = 7, \quad a - b + c = 13.$$

Ezt a lineáris egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy $f(x) = 5x^2 - 7x + 1$, ebből $f(3) = 25$.