

1. (Hétfői RöpZH feladatai.)

- (a) Az $\langle F, \varrho \rangle$ hasonlósági típusban f, g 1-változós, h 2-változós függvényszimbólum, és más függvényszimbólum nincs F -ben. Sorold fel $\langle F, \varrho \rangle$ összes legfeljebb 2 darab függvényszimbólumot tartalmazó termjét melyek egyetlen változója x (más változó nem szerepel bennük).

Megoldás.

- 0 db függvényszimbólum van benne: x ;
- 1 db függvényszimbólum van benne: $f(x), g(x), h(x, x)$;
- 2 db függvényszimbólum van benne: $f(f(x)), f(g(x)), f(h(x, x)), g(f(x)), g(g(x)), g(h(x, x)), h(f(x), x), h(g(x), x), h(h(x, x), x), h(x, f(x)), h(x, g(x)), h(x, h(x, x))$.

- (b) Legyen $\mathcal{A}$ adott algebra. Add meg a $Z \subseteq A \times A$ által generált kongruenciareláció definícióját (ezt nem tanultuk, a feladat az, hogy alkossd meg a definíciót).

Megoldás. $\Theta \in \text{Con}(\mathcal{A})$ a Z által generált kongruencia, ha

- $Z \subseteq \Theta$ és
- ha $\eta \in \text{Con}(\mathcal{A})$, $Z \subseteq \eta$, akkor $\Theta \subseteq \eta$.

Gondold át újra a generált részalgebrával való analógiát!

2. Legyen $\langle \mathcal{A}_i : i \in I \rangle$ azonos típusú algebrák egy rendszere. Igazoljuk, hogy

- (a) minden $j \in I$ -re van szűrjektív homomorfizmus $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ -ből $\mathcal{A}_j$ -re;

Megoldás. Minden j -re legyen

$$\pi_j : \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j \quad \pi_j(\langle a_i : i \in I \rangle) = a_j$$

a j -edik projekció. Könnyű ellenőrizni, hogy π_j szűrjektív homomorfizmus (ha nem világos, számold végig, vagy keress, és megbeszéljük).

- (b) Ha $\mathcal{B}$ olyan algebra, hogy minden $i \in I$ -re van homomorfizmus $\mathcal{B}$ -ből $\mathcal{A}_i$ -re, akkor van homomorfizmus $\mathcal{B}$ -ből $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ -re.

Megoldás. A feltételek szerint minden $i \in I$ -re van egy $\varphi_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_i$ homomorfizmus. Legyen

$$\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i, \quad \varphi(b) = \langle \varphi_i(b), i \in I \rangle.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy φ homomorfizmus (ha nem világos, számold végig).

3. Legyen $\langle \mathcal{A}_i : i \in I \rangle$ azonos típusú algebrák egy rendszere. Igazoljuk, hogy ha $(\forall i \in I) \mathcal{A}_i \models t_1 = t_2$, akkor

$$\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \models t_1 = t_2$$

azaz azonosságok érvényessége öröklődik direktszorzatra.

Megoldás. Legyen $\underline{a} \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ véges sorozat. Azt kell ellenőrizni, hogy

$$t_1^{\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i}(\underline{a}) = t_2^{\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i}(\underline{a}),$$

azaz azt, hogy minden $i \in I$ -re $t_1^{\mathcal{A}_i}(\underline{a}(i)) = t_2^{\mathcal{A}_i}(\underline{a}(i))$ de ez teljesül, mert $\mathcal{A}_i \models t_1 = t_2$.

4. Legyen $\Theta_0, \Theta_1 \in \text{Con}(\mathcal{A})$, $\Theta_0 \subseteq \Theta_1$. Emlékeztető:

$$\Theta_1/\Theta_0 = \{\langle a/\Theta_0, b/\Theta_0 \rangle : \langle a, b \rangle \in \Theta_1\}.$$

Igazoljuk, hogy

(a) $\Theta_1/\Theta_0 \in \text{Con}(\mathcal{A}/\Theta_0)$;

Megoldás. Legyen $\varphi : A/\Theta_0 \rightarrow A/\Theta_1$, $\varphi(a/\Theta_0) = a/\Theta_1$. Ez jóldefiniált, mert

$$a/\Theta_0 = b/\Theta_0 \rightsquigarrow \langle a, b \rangle \in \Theta_0 \subseteq \Theta_1 \rightsquigarrow a/\Theta_1 = b/\Theta_1.$$

Világos, hogy $\ker(\varphi) = \Theta_1/\Theta_0$, ezért ez utóbbi egy ekvivalenciareláció $D(\varphi) = A/\Theta_0$ -n. Be kell még látni, hogy Θ_1/Θ_0 kompatibilis a műveletekkel. Ehhez legyenek

$$f \in F, \quad a_1, \dots, a_{\varrho(f)}, a'_1, \dots, a'_{\varrho(f)} \in A$$

úgy hogy minden $1 \leq i \leq \varrho(f)$ -re $\langle a_i/\Theta_0, a'_i/\Theta_0 \rangle \in \Theta_1/\Theta_0$. Ekkor minden $1 \leq i \leq \varrho(f)$ -re $\langle a_i, a'_i \rangle \in \Theta_1$ is teljesül, továbbá

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\varrho(f)})/\Theta_1 \stackrel{\Theta_1 \in \text{Con}(\mathcal{A})}{=} f^{\mathcal{A}}(a'_1, \dots, a'_{\varrho(f)})/\Theta_1$$

és emiatt Θ_1/Θ_0 definíciója szerint

$$\langle \underbrace{f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\varrho(f)})/\Theta_0}_{f^{\mathcal{A}/\Theta_0}(a_1/\Theta_0, \dots, a_{\varrho(f)}/\Theta_0)}, \underbrace{f^{\mathcal{A}}(a'_1, \dots, a'_{\varrho(f)})/\Theta_0}_{f^{\mathcal{A}/\Theta_0}(a'_1/\Theta_0, \dots, a'_{\varrho(f)}/\Theta_0)} \rangle \in \Theta_1/\Theta_0.$$

ezért

$$\langle f^{\mathcal{A}/\Theta_0}(a_1/\Theta_0, \dots, a_{\varrho(f)}/\Theta_0), f^{\mathcal{A}/\Theta_0}(a'_1/\Theta_0, \dots, a'_{\varrho(f)}/\Theta_0) \rangle \in \Theta_1/\Theta_0,$$

ahogy állítottuk.

(b) $\mu(\eta) = \eta/\Theta_0$ rendezéstartó bijekció az $\mathcal{A}$ algebra Θ_0 -nál bővebb kongruenciái és $\text{Con}(\mathcal{A}/\Theta_0)$ között.

Megoldás.

- μ rendezéstartó: legyen $\Theta_0 \subseteq \eta_1 \subseteq \eta_2 \in \text{Con}(\mathcal{A})$. Azt kell belátni, hogy $\mu(\eta_1) \subseteq \mu(\eta_2)$. De ez így van, mert

$$\langle a/\Theta_0, b/\Theta_0 \rangle \in \mu(\eta_1) \rightsquigarrow \langle a/\Theta_0, b/\Theta_0 \rangle \in \eta_1/\Theta_0 \rightsquigarrow \langle a, b \rangle \in \eta_1 \rightsquigarrow \langle a, b \rangle \in \eta_2 \rightsquigarrow$$

$$\langle a/\Theta_0, b/\Theta_0 \rangle \in \eta_2/\Theta_0 \rightsquigarrow \langle a/\Theta_0, b/\Theta_0 \rangle \in \mu(\eta_2).$$

- μ injektív: ha $\eta_1 \neq \eta_2$, akkor valamelyik (mondjuk η_1) nem részhalmaza a másiknak, azaz van $\langle a, b \rangle \in \eta_1 - \eta_2$. De akkor $\langle a/\Theta_0, b/\Theta_0 \rangle \in \eta_1/\Theta_0 = \mu(\eta_1)$, és $\langle a/\Theta_0, b/\Theta_0 \rangle \notin \eta_2/\Theta_0 = \mu(\eta_2)$, tehát $\mu(\eta_1) \neq \mu(\eta_2)$.
- μ szürjektív: legyen $\eta \in \text{Con}(\mathcal{A})/\Theta_0$, legyen $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\eta$, $\alpha(a) = a/\eta$ a természetes homomorfizmus, és legyen

$$\Theta_1 = \{\langle a, b \rangle \in A \times A : \langle a/\Theta_0, b/\Theta_0 \rangle \in \eta\}.$$

Világos, hogy $\Theta_0 \subseteq \Theta_1$ és Θ_1 ekvivalenciareláció. Az is könnyen ellenőrizhető, hogy $\Theta_1 \in \text{Con}(\mathcal{A})$ (gondold át, ha nem látod kapásból; a Jegyzőkönyvben benne lesz). Ezért elég belátni, hogy $\mu(\Theta_1) = \eta$. Ehhez legyen $a/\Theta_0, b/\Theta_0 \in A/\Theta_0$. Ekkor

$$\langle a/\Theta_0, b/\Theta_0 \rangle \in \mu(\Theta_1) \iff \langle a, b \rangle \in \Theta_1 \iff \langle a/\Theta_0, b/\Theta_0 \rangle \in \eta,$$

és ezzel készen vagyunk.

5. (Előző feladatlap 7. feladata.)

Legyen K tetszőleges test. Igazoljuk, hogy K egyszerű (csak triviális kongrenciarelációi vannak).

Megoldás. Legyen $\Theta \in \text{Con}(K)$, és tegyük fel, hogy $\Theta \neq \Delta$. Az kell belátni, hogy ekkor $\Theta = \nabla$. Ehhez legyenek $c, d \in K$ tetszőlegesek. Mivel $\Theta \neq \Delta$, ezért van $a \neq b \in K$, hogy $\langle a, b \rangle \in \Theta$. De Θ ekvivalenciareláció $\sim \langle -a, -a \rangle \in \Theta$. Továbbá előbb, $\langle \frac{c}{b-a}, \frac{c}{b-a} \rangle \in \Theta$. De Θ kompatibilis K szorzásával is, ezért $\langle 0 \cdot \frac{c}{b-a}, (b-a) \cdot \frac{c}{b-a} \rangle \in \Theta$ azaz $\langle 0, c \rangle \in \Theta$. Hasonlóan adódik $\langle 0, d \rangle \in \Theta$. Innen Θ szimmetriájából és tranzitivitásából $\langle c, d \rangle \in \Theta$, és mivel c, d tetszőleges volt, ezért $\Theta = \nabla$.

6. Legyen $\emptyset \neq A$ tetszőleges halmaz, és minden $a, b \in A$ -ra legyen $a \cdot b = a$. Tekintsük az $\mathcal{A} = \langle A, \cdot \rangle$ algebrát. Igazoljuk, hogy

(a) $\mathcal{A}$ félcsoport (balzéró félcsoport);

Megoldás. Tetszőleges $a, b, c \in A$ -ra $(ab)c = ab = a$ és $a(bc) = a$. Ezért a műveletünk asszociatív.

(b) A mindegyik ekvivalenciarelációja kongruenciája $\mathcal{A}$ -nak (tehát $\mathcal{A}$ kongruenciáinak egyetlen osztálya sem határozza meg a többit).

Megoldás. Legyen Θ tetszőleges ekvivalenciareláció A -n. Azt kell ellenőrizni, hogy Θ kompatibilis a $\cdot$ szorzással. Ehhez tegyük fel, hogy $\langle a_1, a'_1 \rangle \in \Theta$ és $\langle a_2, a'_2 \rangle \in \Theta$. Ekkor $\langle a_1 a_2, a'_1 a'_2 \rangle \in \Theta$, mert $a_1 a_2 = a_1$ és $a'_1 a'_2 = a'_1$.

7. Igazoljuk: tetszőleges $\mathcal{A}$ algebrára és $\Theta \in \text{Con}(\mathcal{A})$ -ra Θ részalgebrája $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ -nak.

Megoldás. Azt kell ellenőrizni, hogy Θ zárt $A \times A$ műveleteire. Ehhez legyen $f \in F$ és

$$\langle a_1, a'_1 \rangle, \dots, \langle a_{\varrho(f)}, a'_{\varrho(f)} \rangle \in \Theta.$$

Ekkor

$$f^{A \times A}(\langle a_1, a'_1 \rangle, \dots, \langle a_{\varrho(f)}, a'_{\varrho(f)} \rangle) = \langle f^A(a_1, \dots, a_{\varrho(f)}), f^A(a'_1, \dots, a'_{\varrho(f)}) \rangle \stackrel{\Theta \in \text{Con}(\mathcal{A})}{\in} \Theta,$$

Tehát Θ zárt a műveletekre.

8. Igazak-e a következő azonosságok minden félcsoportban?

$$(a) \quad xy = yx; \quad (b) \quad (xy)(uv)w = ((xy)u)(vw); \quad (c) \quad (x(yx)(uv))y = (xy)((xu)(vy)).$$

Megoldás. (a) nem igaz, ellenpélda a 6. feladatban szereplő balzéró félcsoportok, ha A alaphalmazuk legalább 2-elemű. Más ellenpélda pl. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}^{2 \times 2}, \cdot \rangle$ (itt $\cdot$ a mátrixok szokásos szorzása). Mivel a mátrixszorzás asszociatív, de nem kommutatív, ezért $\mathcal{A}$ egy nemkommutatív félcsoport. Továbbá (b), (c) igaz, mert mindkét esetben a bal és jobboldalakon ugyanazok a változók ugyanolyan sorrendben vannak, a két oldalnak csak a zárójelezése tér el.

9. Igazoljuk, hogy minden véges félcsoportban van idempotens elem.

Megoldás. Legyen $\mathcal{A} = \langle A, \cdot \rangle$ véges félcsoport, legyen $a \in A$ tetszőleges. Mivel A véges, ezért az

$$\{a^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$$

halmaz is véges. Van tehát $i < j \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a^i = a^j$. Emiatt $a^{i+1} = a^{j+1}$, $a^{i+2} = a^{j+2}$, illetve általában tetszőleges $c \in \mathbb{N}$ -re és $k \geq i$ -re $a^k = a^{k+c(j-i)}$. Legyen $k = i(j-i)$. Ekkor $k \geq i$, ezért $a^k \in \{a^i, \dots, a^{j-1}\}$ és emiatt

$$a^k a^k = a^{k+k} = a^{k+i(j-i)} = a^k.$$

A feladatlap elektronikusan letölthető innen:

<https://users.renyi.hu/~sagi/algebra1-2026osz-letoltesek.html>

