

1. (Hétfői RöpZH feladatai.)

- (a) Az $\langle F, \varrho \rangle$ hasonlósági típusban f, g 1-változós, h 2-változós függvénszimbólum, és más függvénszimbólum nincs F -ben. Sorold fel $\langle F, \varrho \rangle$ összes legfeljebb 2 darab függvénszimbólumot tartalmazó termjét melyek egyetlen változója x (más változó nem szerepel bennük).
- (b) Legyen $\mathcal{A}$ adott algebra. Add meg a $Z \subseteq A \times A$ által generált kongruenciareláció definícióját (ezt nem tanultuk, a feladat az, hogy alkossd meg a definíciót).

2. Legyen $\langle \mathcal{A}_i : i \in I \rangle$ azonos típusú algebrák egy rendszere. Igazoljuk, hogy

- (a) minden $j \in I$ -re van szűrjektív homomorfizmus $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ -ből $\mathcal{A}_j$ -re;
- (b) Ha $\mathcal{B}$ olyan algebra, hogy minden $i \in I$ -re van szűrjektív homomorfizmus $\mathcal{B}$ -ből $\mathcal{A}_i$ -re, akkor van homomorfizmus $\mathcal{B}$ -ből $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ -re.

3. Legyen $\langle \mathcal{A}_i : i \in I \rangle$ azonos típusú algebrák egy rendszere. Igazoljuk, hogy ha $(\forall i \in I) \mathcal{A}_i \models t_1 = t_2$, akkor

$$\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \models t_1 = t_2$$

azaz azonosságok érvényessége öröklődik direktszorzatra.

4. Legyen $\Theta_0, \Theta_1 \in \text{Con}(\mathcal{A})$, $\Theta_0 \subseteq \Theta_1$. Emlékeztető:

$$\Theta_1/\Theta_0 = \{ \langle a/\Theta_0, b/\Theta_0 \rangle : \langle a, b \rangle \in \Theta_1 \}.$$

Igazoljuk, hogy

- (a) $\Theta_1/\Theta_0 \in \text{Con}(\mathcal{A}/\Theta_0)$;
- (b) $\mu(\eta) = \eta/\Theta_0$ rendezéstartó bijekció az $\mathcal{A}$ algebra Θ_0 -nál bővebb kongruenciái és $\text{Con}(\mathcal{A}/\Theta_0)$ között.

5. (Előző feladatlap 7. feladata.)

Legyen K tetszőleges test. Igazoljuk, hogy K egyszerű (csak triviális kongruenciarelációi vannak).

6. Legyen $\emptyset \neq A$ tetszőleges halmaz, és minden $a, b \in A$ -ra legyen $a \cdot b = a$. Tekintsük az $\mathcal{A} = \langle A, \cdot \rangle$ algebrát. Igazoljuk, hogy

- (a) $\mathcal{A}$ félcsoporth (balzéró félcsoporth);
- (b) A mindegyik ekvivalenciarelációja kongruenciája $\mathcal{A}$ -nak (tehát $\mathcal{A}$ kongruenciáinak egyetlen osztálya sem határozza meg a többi).

7. Igazoljuk: tetszőleges $\mathcal{A}$ algebrára és $\Theta \in \text{Con}(\mathcal{A})$ -ra Θ részalgebrája $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ -nak.

8. Igazak-e a következő azonosságok minden félcsoporthban?

$$(a) \quad xy = yx; \quad (b) \quad (xy)(uv)w = ((xy)u)(vuw); \quad (c) \quad (x(yx)(uv))y = (xy)((xu)(vy)).$$

9. Igazoljuk, hogy minden véges félcsoporthban van idempotens elem.

A feladatlap elektronikusan letölthető innen:

<https://users.renyi.hu/~sagi/algebra1-2026oszf-letoltesek.html>

