

Definíció. Az $\mathcal{A}$ algebra egyszerű, ha csak triviális kongruenciarelációi vannak:

- $\Delta = \{\langle a, a \rangle : a \in A\}$ (diagonális kongruencia) és
- $\nabla = \{\langle a, b \rangle : a, b \in A\}$ (teljes kongruencia).

1. Legyenek $\langle F, \varrho \rangle$ és $\langle G, \sigma \rangle$ olyan hasonlósági típusok, melyekre $G \subseteq F$ és $\sigma = \varrho|_G$. Legyen az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ algebrák hasonlósági típusa $\langle F, \varrho \rangle$ és legyen ezek $\langle G, \sigma \rangle$ szerinti reduktuma $\mathcal{A}'$ illetve $\mathcal{B}'$. Igazoljuk:

- (a) Ha $\Theta \in \text{Con}(\mathcal{A})$, akkor $\Theta \in \text{Con}(\mathcal{A}')$.
 (b) Ha van szűrjektív homomorfizmus $\mathcal{A}$ -ról $\mathcal{B}$ -re, akkor van szűrjektív homomorfizmus $\mathcal{A}'$ -ről $\mathcal{B}'$ -re.

Megoldás.

- (a) Tegyük fel, hogy $\Theta \in \text{Con}(\mathcal{A})$. Azt kell belátni, hogy Θ kompatibilis az összes G -beli művelettel, azaz tetszőleges $f \in G$ -re és tetszőleges $a_1, \dots, a_{\varrho(f)}, a'_1, \dots, a'_{\varrho(f)} \in A$ -ra,

$$\text{ha } \langle a_1, a'_1 \rangle \in \Theta, \dots, \langle a_{\varrho(f)}, a'_{\varrho(f)} \rangle \in \Theta, \text{ akkor } \langle f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\varrho(f)}), f^{\mathcal{A}}(a'_1, \dots, a'_{\varrho(f)}) \rangle \in \Theta.$$

De ez még minden $f \in F$ -re is teljesül, ha egyszer $\Theta \in \text{Con}(\mathcal{A})$.

- (b) Ha $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ szűrjektív homomorfizmus, akkor φ nyilván megtartja az összes G -beli műveletet is, tehát φ mutatja, hogy van szűrjektív homomorfizmus $\mathcal{A}'$ -ről $\mathcal{B}'$ -re.

Második megoldás(b)-re: a homomorfizmustétel szerint $\mathcal{A}/\ker(\varphi)$ izomorf $\mathcal{B}$ -vel, és az (a) rész miatt $\ker(\varphi) \in \text{Con}(\mathcal{A}')$. Mivel faktoralgebra reduktuma azonos a megfelelő reduktum faktoralgebrájával (ez szinte trivi, gondold meg), ezért $\mathcal{A}'/\ker(\varphi)$ izomorf lesz $\mathcal{B}'$ -vel azaz $\mathcal{B}'$ valóban homomorf képe lesz $\mathcal{A}'$ -nek.

2. Előadáson tanultuk, hogy egy algebra részalgebráinak metszete részalgebra marad. Igaz-e, hogy minden algebra bármely két részalgebrájának uniója is részalgebra marad?

Megoldás. Az állítás nem igaz. Például legyen V az $\mathbb{R}$ feletti 2-dimenziós vektortér, és legyenek $V_1 = \text{Span}\{e_1\}, V_2 = \text{Span}\{e_2\}$ a sztenderd bázisvektorok által generált 1-dimenziós alterek. Ezek V -nek részalgebrái, de $V_1 \cup V_2$ nem zárt a vektorok összeadására, ezért $V_1 \cup V_2$ nem altér (ami pontosan azt jelenti, hogy nem részalgebra).

3. Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges algebra, $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ és legyenek t_1, t_2 megfelelő típusú termek. Igazold, hogy

- (a) ha $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$, akkor $\mathcal{B} \models t_1 = t_2$ (azaz azonosságok érvényessége részalgebrákra öröklődik).
 (b) Igaz-e az előző állítás megfordítása?
 (c) Tegyük fel, hogy $t_1 = t_2$ -ben összesen k darab változó van, és $\mathcal{B} \models t_1 = t_2$ mindig teljesül, ha $\mathcal{B}$ az $\mathcal{A}$ -nak legfeljebb k darab elemmel generált részalgebrája. Igazoljuk, hogy ekkor $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$.

Megoldás.

- (a) Legyen $\underline{b}$ tetszőleges sorozat B elemeiből. Ekkor $\underline{b}$ tekinthető A elemeiből álló sorozatnak is. Mivel $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$, ezért $t_1^{\mathcal{A}}(\underline{b}) = t_2^{\mathcal{A}}(\underline{b})$ és emiatt $t_1^{\mathcal{B}}(\underline{b}) = t_2^{\mathcal{B}}(\underline{b})$, tehát $\mathcal{B} \models t_1 = t_2$.
 (b) A megfordítás nem igaz: legyen pl. $\mathcal{A}$ a (2×2) -es valós mátrixok gyűjteménye, és legyen $\mathcal{B}$ a (2×2) -es valós diagonális mátrixok gyűjteménye. Világos, hogy $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ kommutatív, de $\mathcal{A}$ nem.
 (c) Ellentmondást keresve tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \not\models t_1 = t_2 \rightsquigarrow$ van $\underline{a} \in A^k$, hogy $t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \neq t_2^{\mathcal{A}}(\underline{a})$. Legyen $\mathcal{B} = \langle \underline{a} \rangle$ az $\underline{a}$ által generált részalgebra. Ekkor egyrészt, mivel $\mathcal{B}$ -t legfeljebb k darab elem generálja, a feladat feltételei miatt $t_1^{\mathcal{B}}(\underline{a}) = t_2^{\mathcal{B}}(\underline{a})$. Másrészt, mivel $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$, ezért

$$t_1^{\mathcal{B}}(\underline{a}) \stackrel{(*)}{=} t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \neq t_2^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \stackrel{(*)}{=} t_2^{\mathcal{B}}(\underline{a}),$$

vagyis $t_1^{\mathcal{B}}(\underline{a}) \neq t_2^{\mathcal{B}}(\underline{a})$, $\nmid$.

A $(*)$ -al jelölt lépéseket az (a) részben is használtuk már, talán érdemes külön meggondolni (pl. t_1 illetve t_2 összetettsége szerinti indukcióval könnyen adódnak abból, hogy $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$).

4. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathcal{A}$ algebrának a fenti Δ és ∇ relációk kongruenciái.

Megoldás. Pl. Δ esetben azt kell megmutatni, hogy Δ kompatibilis az összes F -beli művelettel, azaz tetszőleges $f \in F$ -re és $a_1, \dots, a_{\varrho(f)}, a'_1, \dots, a'_{\varrho(f)} \in A$ -ra,

$$\text{ha } a_1 = a'_1, \dots, a_{\varrho(f)} = a'_{\varrho(f)}, \text{ akkor } f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\varrho(f)}) = f^{\mathcal{A}}(a'_1, \dots, a'_{\varrho(f)}),$$

de ez nyilvánvaló. A ∇ -ra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható, (sőt picit még könnyebb is).

5. Legyen $\mathcal{A}$ az egész számok szokásos gyűrűje és legyen $m \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy

$$\Theta = \{\langle a, b \rangle : a \equiv b \pmod{m}\}$$

kongruenciarelációja $\mathcal{A}$ -nak.

Megoldás. Azt kell megmutatni, hogy Θ (vagyis az m szerinti maradékosztály-képzés, mint ekvivalenciareláció) kompatibilis az egész számok összeadásával és szorzásával, azaz azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $a_1, a_2, a'_1, a'_2 \in \mathbb{Z}$ -re

$$\text{ha } a_1 \equiv a'_1 \pmod{m} \quad \text{és} \quad a_2 \equiv a'_2 \pmod{m} \quad \text{akkor}$$

$$a_1 + a_2 \equiv a'_1 + a'_2 \pmod{m} \quad \text{és} \quad a_1 a_2 \equiv a'_1 a'_2 \pmod{m}.$$

De Bev.Alg.-1-ből tanultuk, hogy ez így van.

6. Legyen U a 2×2 -es valós felső háromszögmátrixok szokásos gyűrűje. Mutassuk meg, hogy

$$\theta = \left\{ \langle A, A' \rangle \in U^2 : A - A' = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ valamely } u \in \mathbb{R}\text{-re} \right\}$$

kongruenciarelációja U -nak.

Megoldás. Azzal kezdjük, hogy mutassuk meg: θ ekvivalenciareláció. A tranzitivitás igazolásához használjuk fel, hogy tetszőleges $A, B, C \in U$ -ra $A - C = (A - B) + (B - C)$.

Ezután, mint az előző feladatokban, azt kell megmutatni, hogy θ kompatibilis a mátrixösszeadással, és a mátrixszorzással. Legyenek $\langle A, A' \rangle \in \theta$ és $\langle B, B' \rangle \in \theta$. Az előző feladatok alapján azt könnyű megmondani, hogy ekkor $\langle A + B, A' + B' \rangle \in \theta$. Azt, hogy $\langle A \cdot B, A' \cdot B' \rangle \in \theta$, két lépésben igazold. Először azt igazold, hogy $\langle A \cdot B, A' \cdot B \rangle \in \theta$, majd pedig azt, hogy $\langle A' \cdot B, A' \cdot B' \rangle \in \theta$. Végül használd, hogy θ tranzitív reláció.

7. Legyen K tetszőleges test. Igazoljuk, hogy K egyszerű, vagyis (csak triviális kongruenciarelációi vannak).

Megoldás. Legyen $\Theta \in \text{Con}(K)$, és tegyük fel, hogy $\Theta \neq \Delta$. Az kell belátni, hogy ekkor $\Theta = \nabla$. Ehhez legyenek $c, d \in K$ tetszőlegesek. Mivel $\Theta \neq \Delta$, ezért van $a \neq b \in K$, hogy $\langle a, b \rangle \in \Theta$. De θ ekvivalenciareláció $\sim \langle -a, -a \rangle \in \Theta$. Továbbá θ kompatibilis K összeadásával $\sim \langle a - a, b - a \rangle \in \Theta$, azaz $\langle 0, b - a \rangle \in \Theta$. De $a \neq b \sim a - b \neq 0$. Mint előbb, $\langle \frac{c}{b-a}, \frac{c}{b-a} \rangle \in \Theta$. De θ kompatibilis K szorzásával is, ezért $\langle 0 \cdot \frac{c}{b-a}, (b-a) \cdot \frac{c}{b-a} \rangle \in \Theta$ azaz $\langle 0, c \rangle \in \Theta$. Hasonlóan adódik $\langle 0, d \rangle \in \Theta$. Innen θ szimmetriájából és tranzitivitásából $\langle c, d \rangle \in \Theta$, és mivel c, d tetszőleges volt, ezért $\theta = \nabla$.

8. Igaz-e, hogy az alábbi $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ algebra-párokra $\mathcal{A}$ izomorf $\mathcal{B}$ egy részalgebrájával (azaz $\mathcal{A}$ beágyazható $\mathcal{B}$ -be)? A megadott műveletek mindig a szokásosak.

(a) $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}^{100 \times 100}, I, +, \cdot \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \mathbb{R}^{2026 \times 2026}, I, +, \cdot \rangle;$

(b) $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, + \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle;$

(c) $\mathcal{A} = \langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \cdot \rangle;$

(d) $\mathcal{A} = \langle \mathbb{C}, 1, +, \cdot \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \mathbb{Q}^{2 \times 2}, I, +, \cdot \rangle;$

(Útmutatás: ha lenne ilyen beágyazás, akkor milyen mátrix felelne meg $\sqrt[3]{2}$ -nek?)

(e) $\mathcal{A} = \langle \mathbb{C}, + \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, + \rangle \quad (\text{fordítva könnyű lenne}).$

Megoldás.

- (a) Igaz. Legyen $\mathcal{C}$ azoknak a 2026×2026 -os valós mátrixoknak a halmaza, melyek bal felső (100×100) -as részén kívül minden elem nulla, és a bal felső (100×100) -as rész minden eleme racionális. A blokkmátrixokkal kapcsolatban az előző félévben tanultak alapján $\mathcal{C}$ zárt a mátrixösszeadásra, és mátrixszorzásra. Ezért $\mathcal{C} \leq \mathcal{B}$, az pedig világos, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{C}$ izomorfak.
- (b) Igaz. Legyen $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = e^x$. Mivel φ injektív és

$$\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \varphi(x)\varphi(y),$$

ezért φ izomorfizmus az értelmezési tartománya és értékkészlete között, ez mutatja, hogy $\mathcal{A}$ izomorf $\mathcal{B}$ egy részalgebrájával.

- (c) Igaz. A jól ismert $(a+bi) \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ leképezés egy injektív gyűrűhomomorfizmus $\leadsto$ izomorfizmus az értelmezési tartománya és értékkészlete között; ez mutatja, hogy most is $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.
- (d) Nem igaz. 1. megoldás: Még csak injektív függvény sincs $\mathbb{C}$ -ből $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ -be, mert $|\mathbb{C}| > |\mathbb{Q}^{2 \times 2}|$.
2. megoldásként azt mutatjuk meg, hogy nincs homomorfizmus sem $\mathcal{A}$ -ból $\mathcal{B}$ -be. Ellentmondást keresve tegyük fel, hogy $\mathcal{C} \leq \mathcal{B}$ és $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ homomorfizmus. Mivel $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$, ezért az $A = \varphi(\sqrt[3]{2})$ mátrixra $A^3 = 2I$, azaz A minimálpolinomjára $m_A(x) \mid x^3 - 2$. De $x^3 - 2$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett (mert 3-adfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$ -ban), ezért $m_A(x) = x^3 - 2$. Ugyanakkor A (2×2) -es, ezért karakterisztikus polinomja másodfokú, így a Hamilton-Cayley tétel miatt $m_A(x)$ is legfeljebb másodfokú lehetne; $\nmid$.
- (e) Igaz. Legyen V_1 a valós számok $\mathbb{Q}$ feletti vektortere és legyen V_2 a komplex számok $\mathbb{Q}$ feletti vektortere. Mivel

$$\dim(V_1) = \dim(V_2) = \text{kontínuum},$$

ezért V_1 és V_2 izomorfak, mint vektorterek. Ezért az 1. feladathoz hasonlóan V_1 és V_2 vektorösszeadásra vett redukumai is izomorfak. De ezek a redukumok éppen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$. Mivel $\mathcal{B}$ részalgebrája sajátmagának, ezért $\mathcal{A}$ valóban izomorf $\mathcal{B}$ egy részalgebrájával.

A feladatlap elektronikusan letölthető innen:

<https://users.renyi.hu/~sagi/algebra1-2026osz-letoltesek.html>

