

Definíció. Az $\mathcal{A}$ algebra egyszerű, ha csak triviális kongruenciarelációi vannak:

- $\Delta = \{\langle a, a \rangle : a \in A\}$ (diagonális kongruencia) és
- $\nabla = \{\langle a, b \rangle : a, b \in A\}$ (teljes kongruencia).

- Legyenek $\langle F, \varrho \rangle$ és $\langle G, \sigma \rangle$ olyan hasonlósági típusok, melyekre $G \subseteq F$ és $\sigma = \varrho|_G$. Legyen az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ algebrak hasonlósági típusa $\langle F, \varrho \rangle$ és legyen ezek $\langle G, \sigma \rangle$ szerinti reduktuma $\mathcal{A}'$ illetve $\mathcal{B}'$. Igazoljuk:
 - Ha $\Theta \in \text{Con}(\mathcal{A})$, akkor $\Theta \in \text{Con}(\mathcal{A}')$.
 - Ha van szűrjektív homomorfizmus $\mathcal{A}$ -ról $\mathcal{B}$ -re, akkor van szűrjektív homomorfizmus $\mathcal{A}'$ -ről $\mathcal{B}'$ -re.
- Előadáson tanultuk, hogy egy algebra részalgebráinak metszete részalgebra marad. Igaz-e, hogy minden algebra bármely két részalgebrájának uniója is részalgebra marad?
- Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges algebra, $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ és legyenek t_1, t_2 megfelelő típusú termek. Igazoljuk, hogy
 - ha $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$, akkor $\mathcal{B} \models t_1 = t_2$ (azaz azonosságok érvényessége részalgebrákra öröklődik).
 - Igaz-e az előző állítás megfordítása?
 - Tegyük fel, hogy $t_1 = t_2$ -ben összesen k darab változó van, és $\mathcal{B} \models t_1 = t_2$ mindig teljesül, ha $\mathcal{B}$ az $\mathcal{A}$ -nak legfeljebb k darab elemmel generált részalgebrája. Igazoljuk, hogy ekkor $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$.
- Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathcal{A}$ algebrának a fenti Δ és ∇ relációk kongruenciái.
- Legyen $\mathcal{A}$ az egész számok szokásos gyűrűje és legyen $m \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy

$$\Theta = \{\langle a, b \rangle : a \equiv b \pmod{m}\}$$

kongruenciarelációja $\mathcal{A}$ -nak.

- Legyen U a 2×2 -es valós felső háromszögmátrixok szokásos gyűrűje. Mutassuk meg, hogy

$$\theta = \left\{ \langle A, A' \rangle \in U^2 : A - A' = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ valamely } u \in \mathbb{R}\text{-re} \right\}$$

kongruenciarelációja U -nak.

- Legyen K tetszőleges test. Igazoljuk, hogy K egyszerű, vagyis (csak triviális kongruenciarelációi vannak).
- Igaz-e, hogy az alábbi $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ algebra-párokra $\mathcal{A}$ izomorf $\mathcal{B}$ egy részalgebrájával (azaz $\mathcal{A}$ beágyazható $\mathcal{B}$ -be)? A megadott műveletek mindig a szokásosak.
 - $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}^{100 \times 100}, I, +, \cdot \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}^{2026 \times 2026}, I, +, \cdot \rangle$;
 - $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, + \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$;
 - $\mathcal{A} = \langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \cdot \rangle$;
 - $\mathcal{A} = \langle \mathbb{C}, 1, +, \cdot \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Q}^{2 \times 2}, I, +, \cdot \rangle$;
(Útmutatás: ha lenne ilyen beágyazás, akkor milyen mátrix felelne meg $\sqrt[3]{2}$ -nek?)
 - $\mathcal{A} = \langle \mathbb{C}, + \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, + \rangle$ (fordítva könnyű lenne).

A feladatlap elektronikusan letölthető innen:

<https://users.renyi.hu/~sagi/algebra1-2026oszf-letoltesek.html>

