EGY KOMBINATORIKUS PROBLÉMÁRÓL

ERDŐS PÁL és HAJNAL ANDRÁS

Legyen $\mathscr{S}$ tetszőleges halmaz, $f(A)$ egy halmazfüggvény, mely $\mathscr{S}$ minden véges A részhalmazához $\mathscr{S}-A$ egy X elemét rendeli. Ha $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}$, $\mathscr{S}$ egy tetszőleges részhalmaza, akkor

$$F(\mathscr{S}_1) = \bigcup_{A \subset \mathscr{S}_1} f(A)$$

ahol A végigfut $\mathscr{S}_1$ minden véges részhalmazán. Az $\mathscr{S}_1$ halmazt akkor nevezzük függetlennek, ha $\mathscr{S}_1 \cap F(\mathscr{S}_1)$ üres. Egy régebbi dolgozatunkban bebizonyítottuk [1], hogyha $|\mathscr{S}| < \aleph_\omega$ akkor mindig van oly $f(A)$ halmazfüggvény, hogy $\mathscr{S}$-nek nincs végtelen független részhalmaza. Eldöntetlen maradt az a kérdés, hogyha $|\mathscr{S}| = \aleph_\omega$ van-e akkor $\mathscr{S}$-nek végtelen független részhalmaza [1]. Ezt a kérdést most sem tudjuk eldönteni, csak megjegyezzük, hogy az igenlő válasz azonnal következne, ha ki tudnók mutatni, hogy minden $|\mathscr{S}| = \aleph_\omega$-hez és $f(A)$ függvényhez van oly $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}$, $|\mathscr{S}_1| = \aleph_\omega$, melyre

$$|\mathscr{S} - F(\mathscr{S}_1)| = \aleph_\omega.$$

Ily $\mathscr{S}_1$ halmaz létezése azonban valószínűleg eldönthetetlen. Az ily $\mathscr{S}_1$ halmaz létezése összefügg a Johnson algebrák létezésének problémájával [2].

Ezen dolgozatban nem fogunk e mély halmazelméleti kérdésekkel foglalkozni, hanem e problémák véges analogonjait fogjuk vizsgálni. Legyen $|\mathscr{S}| = n < \aleph_0$, $h(n)$ legyen az a legnagyobb szám, hogy minden f függvényre $\mathscr{S}$-nek van egy $\mathscr{S}_1$ független részhalmaza, melyre $|\mathscr{S}_1| \geqq h(n)$. $H(n)$ legyen az a legkisebb szám, melyre van oly f függvény, hogy minden $\mathscr{S}_2 \subset \mathscr{S}$ halmazra, melyre $|\mathscr{S}_2| \geqq H(n)$, $F(\mathscr{S}_2) = \mathscr{S}$. $h(n)$-re csak nagyon gyenge alsó és felső becslésünk van, de $H(n)$-re meglepően jó becslésünk van. Fennáll ugyanis a következő

TÉTEL. *Legyen $n > n_0(\varepsilon)$. Fennáll*

$$\frac{\log n}{\log 2} < H(n) < \frac{\log n}{\log 2} + \frac{(3+\varepsilon)\log\log n}{\log 2}.$$

Az alsó becslés triviális. Ugyanis $|F(\mathscr{S}_2)| \leqq 2^{|\mathscr{S}_2|}$ és így $H(n) \geqq \dfrac{\log n}{\log 2}$. Könnyű belátni azonban, hogy $H(n) > \log n/\log 2$. Legyen ugyanis $A \subset \mathscr{S}$, $B \subset \mathscr{S}$, $|A| = |B| = 2$, $f(A) = f(B)$ és $A \subset \mathscr{S}_2$, $B \subset \mathscr{S}_2$ (ily A és B nyilván van, minthogy $\binom{n}{2} > n$ ha $n > 3$). Nyilvánvaló, hogy $|F(\mathscr{S}_2)| < 2^{|\mathscr{S}_2|}$ és ezért $H(n) > \log n/\log 2$.

Valószínűnek látszik, hogy $\lim_{n=\infty}\left(H(n)-\frac{\log n}{\log 2}\right)=\infty$, de ezt nem sikerült bebizonyítanunk.

A felső határ bebizonyítása nehezebb lesz. Be fogjuk bizonyítani, hogy egy bizonyos szempontból majdnem minden f függvényre igaz, hogy minden $\mathcal{S}_1\subset\mathcal{S}$, $|\mathcal{S}_1|>\frac{\log n}{\log 2}+\frac{(3+\varepsilon)\log\log n}{\log 2}$ kielégíti az $F(\mathcal{S}_1)=\mathcal{S}$ egyenlőséget. Hogy ezt beláthassuk, legyen $t=\left[\frac{\log n}{\log 2}+\frac{(3+\varepsilon)\log\log n}{2\log 2}\right]$. Az f függvényt ezentúl csak $\mathcal{S}$ t elemű részhalmazain fogjuk tekinteni. Legyen

$$F'(\mathcal{S}_1)=\bigcup_{A\subset\mathcal{S}_1} f(A)$$

ahol A végigfut $\mathcal{S}_1$ összes t elemű részhalmazain. Nyilván $F'(\mathcal{S}_1)\subset F(\mathcal{S}_1)$.

Az összes f függvények száma nyilván $(n-t)^{\binom{n}{t}}$. Hogy ezt beláthassuk megjegyezzük, hogyha $|\mathcal{S}_1|=t$, akkor $f(\mathcal{S}_1)$ $n-t$ különböző értéket vehet fel, és hogy $\mathcal{S}$ t elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{t}$.

Legyen mármost $\mathcal{S}_2$ $\mathcal{S}$ egy tetszőleges $2t$ elemű részhalmaza. Felülről megbecsüljük azon f függvények számát, melyekre $F'(\mathcal{S}_2)\neq\mathcal{S}$, azaz melyekre $F'(\mathcal{S}_2)$ $\mathcal{S}$ valódi részhalmaza. Legyen x $\mathcal{S}$ egy tetszőleges eleme. Hány olyan f függvény van, melyre $x\notin F'(\mathcal{S}_2)$? Tegyük fel először, hogy $x\notin\mathcal{S}_2$. Akkor ezen f függvények száma nyilván

$$(1)\qquad (n-t-1)^{\binom{2t}{t}}(n-t)^{\binom{n}{t}-\binom{2t}{t}},$$

ugyanis, ha $\mathcal{S}_1\subset\mathcal{S}_2$, akkor $f(\mathcal{S}_1)\neq x$ és így $f(\mathcal{S}_1)$ számára csak $n-t-1$ választásunk van. Ha viszont $x\in\mathcal{S}_2$ és $\mathcal{S}_1\subset\mathcal{S}_2$, $x\notin\mathcal{S}_1$, akkor ezen $\mathcal{S}_1$-ekre $f(\mathcal{S}_1)$ számára megint csak $n-t-1$ választásunk van és így a keresett f függvények száma ebben az esetben

$$(2)\qquad (n-t-1)^{\binom{2t-1}{t}}(n-t)^{\binom{n}{t}-\binom{2t-1}{t}}.$$

(1) és (2) miatt az összes olyan f függvények száma, melyekre van oly $\mathcal{S}_2$, melyekre $F'(\mathcal{S}_2)\neq\mathcal{S}_2$ legfeljebb ((1) és (2) és $|\mathcal{S}_2|=2t$ miatt)

$$(3)\qquad \begin{aligned}&(n-2t)(n-t-1)^{\binom{2t}{t}}(n-t)^{\binom{n}{t}-\binom{2t}{t}}+2t(n-t-1)^{\binom{2t-1}{t}}(n-t)^{\binom{n}{t}-\binom{2t-1}{t}}<\\ &<n(n-t)^{\binom{n}{t}-\binom{2t-1}{t}}(n-t-1)^{\binom{2t-1}{t}}<n(n-t)^{\binom{n}{t}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\binom{2t-1}{t}}.\end{aligned}$$

$\mathcal{S}$, $2t$ elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{2t}$, ezért (3) miatt azon függvények száma, melyekhez van oly $\mathcal{S}_2\subset\mathcal{S}$, $|\mathcal{S}_2|=2t$, $F'(\mathcal{S}_2)\neq\mathcal{S}$ kisebb, mint

$$(4)\qquad \binom{n}{2t}n(n-t)^{\binom{n}{t}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\binom{2t-1}{t}}=N$$

Ha bebizonyítjuk, hogy $n > n_0$ esetén.

(5)
$$N < (n-t)^{\binom{n}{t}}$$

akkor van egy oly f, hogy minden $\mathscr{S}_2 \subset \mathscr{S}$, $|\mathscr{S}_2| = 2t$ halmazra $F'(\mathscr{S}_2) = \mathscr{S}$ (azaz $F(\mathscr{S}_2) = \mathscr{S}$) s ezzel tételünk be volna bizonyítva. Ezért elég (5)-öt bebizonyítanunk. Hogy (5)-öt bebizonyítsuk elég lesz kimutatnunk, hogy

$$\binom{n}{2t} n < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\binom{2t-1}{t}}$$

Mármost, ha $n > n_0$ akkor $2t! > n$ ugyanis $t! > e^{ct}$ minden C-re, ha $t > t_0(C)$ és $t > \log n / \log 2$. Ezért nyilván

$$\binom{n}{2t} n < \frac{n^{2t}}{2t!} n < n^{2t}, \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\binom{2t-1}{t}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\binom{2t-1}{t}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4^t/t}.$$

Tehát elég lesz kimutatni, hogy

$$n^{2t} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4^t/t},$$

azaz

$$2t \log n < \frac{4^t}{t} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2n}$ miatt elég kimutatni, hogy $n > n_0$ esetén

$$4^t > 4nt^2 \log n$$

azaz

$$t = \left[\frac{\log n}{\log 2} + \frac{(3+\varepsilon)\log\log n}{\log 2}\right]$$

miatt

$$4^{(3+\varepsilon)\log\log n/\log 2} > 4t^2 \log n$$

ami nyilván teljesül, ha $n > n_0(\varepsilon)$.

Módszerünk kisebb változtatásával nyerhetnők, hogy $n > n_0(\varepsilon)$ esetén

$$H(n) < \frac{\log n}{\log 2} + \frac{(2+\varepsilon)\log\log n}{\log 2}$$

de egyelőre nem látjuk hogyan lehetne $H(n)$-et $o(\log\log n)$ pontossággal meghatározni.

Tételünkből könnyen adódik egyrészt, hogy

$$h(n) < \frac{\log n + 3\log\log n}{\log 2} + o(\log\log n)$$

másrészt $h(n) > ck$ ahol k az a legkisebb szám, melyre $\log_k n < 1$, ahol $\log_k n$ a k-szor iterált logaritmust jelenti. Úgy gondoljuk, hogy úgy az alsó, mint a felső becslés nagyon messze van a valóságtól.

$H(n)$ meghatározására vonatkozó probléma a következő módon átfogalmazható: Meghatározandó az a legkisebb t, melyre az $\mathcal{S}$ $|\mathcal{S}|=n$ halmaz legfeljebb t elemű részhalmazait be lehet osztani n osztályba úgy, hogyha $\mathcal{S}_1\subset\mathcal{S}$, $|\mathcal{S}_1|=2t$ $\mathcal{S}$ egy tetszés szerinti részhalmaza $\mathcal{S}_1$ részhalmazai között mind az n osztály előfordul [3].

IRODALOM

[1] *P. Erdős* and *A. Hajnal*, On the structure of set mappings, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9 (1958), 111—131.

[2] *P. Erdős* and *A. Hajnal*, On a problem of B. Jonnson, Bull. Acad. Polon. Sci. 14 (1965), 19—23.

[3] *P. Erdős* and *A. Hajnal*, On a property of families of sets, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (1961), 87—123, lásd még P. Erdős, On a combinatorial problem II ibid. 15 (1964), 445—447.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ КОМБИНАТОРИКИ

П. ЭРДЁШ И А. ХАЙНАЛ

ON A COMBINATORIAL PROBLEM

P. ERDŐS and A. HAJNAL

Let S be a set of n elements. Let $f(A)$ be a set function which makes correspond to every subset A of S an element of $S-A$. Put $F(A)=\bigcup_{B\subset A} f(B)$ where B runs through all subsets of A. Let $H(n)$ be the smallest integer for which there is a function f so that for every $S_1\subset S$ $|S_1|\geqq H(n)$ we have $F(S\ )=S$. We prove

$$\frac{\log n}{\log 2} < H(n) < \frac{\log n}{\log 2} + 3\log\log n/\log 2 + o(\log\log n).$$

We conjecture $\lim_{n=\infty}\left(H(n)-\frac{\log n}{\log 2}\right)=\infty$ but can not even prove $H(n)>\log n/\log 2+1$.