Sätze und Probleme über $\frac{p_k}{k}$.

Von P. Erdös und K. Prachar

Wenn mit p_k die k-te Primzahl bezeichnet wird, so gilt nach dem Primzahlsatz

$$\frac{p_k}{k} \sim \log k \qquad (k \to \infty).$$

$\log k$ ist eine monoton zunehmende Funktion von k und es gilt

$$\sum_{p_k \leq x} \{\log (k+1) - \log k\} \sim \log x .$$

Wir wollen folgendes beweisen:

Satz 1: *Es gilt*

$$(1) \qquad c_1 \log^2 x < \sum_{p_k \leq x} \left| \frac{p_{k+1}}{k+1} - \frac{p_k}{k} \right| < c_2 \log^2 x$$

bei passenden $c_1, c_2 > 0$.

Hieraus folgt insbesondere, daß die Folge p_k/k nicht von einer Stelle an monoton sein kann. Ferner beweisen wir

Satz 2: *Sei* p_{k_i}, $i = 1, 2, \ldots$, *eine Teilfolge der Folge aller Primzahlen, für die*

$$(2) \qquad \frac{p_{k_i}}{k_i} < \frac{p_{k_{i+1}}}{k_{i+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Dann ist die Anzahl solcher p_{k_i}, $p_{k_i} \leq x$ *stets* $0(x/\log x)$.

Beweis von Satz 1: Sei $A = A(x)$ die Anzahl der p_k, für die $\frac{x}{2} < p_k \leq x$ gilt und

$$(3) \qquad p_{k+1} - p_k \leq (1-\delta) \log x .$$

Wir wollen beweisen, daß bei passend gewähltem $\delta > 0$ diese Anzahl $> c_3 x/\log x$ ist. Sei $B = B(x)$ die Anzahl der p_k mit $\frac{1}{2} x < p_k \leq x$, für die

$$(4) \qquad (1-\delta) \log x < p_{k+1} - p_k \leq (1+\delta) \log x$$

Nach einer mit der Brunschen Methode gewonnenen Abschätzung von Schnirelman ist die Anzahl solcher p_k, für die $p_{k+1} - p_k$ einen festen Wert n hat, kleiner als

$$c_4 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{d/n} \frac{1}{d}.$$

Damit folgt

$$B < \sum_{(1-\delta)\log x < n \leq (1+\delta)\log x} \left(c_4 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{d/n} \frac{1}{d} \right) \tag{5}$$

$$\leq \frac{c_4 x}{\log^2 x} \sum_{d \leq (1+\delta)\log x} \frac{1}{d} \left(\frac{2\delta \log x}{d} + 1 \right) < c_5 \frac{\delta x}{\log x}$$

bei festem $\delta > 0$. Nun hat man

$$\sum_{\frac{1}{2}x < p_k \leq x} (p_{k+1} - p_k) < (\tfrac{1}{2} + \varepsilon) x \qquad (x > x_0(\varepsilon)) \tag{6}$$

bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$, da nach dem Primzahlsatz für $p_k \leq x$ stets $p_{k+1} < (1 + \varepsilon)\, x$ ist. Aus (6) folgt insbesondere

$$B(1 - \delta) \log x + \{\pi(x) - \pi(\tfrac{1}{2}x) - A - B\}\,(1 + \delta) \log x < (\tfrac{1}{2} + \varepsilon)\, x,$$

wobei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ bedeutet. Unter Benutzung von (5) ergibt sich daraus wegen $\pi(x) - \pi(\frac{1}{2}x) > (\frac{1}{2} - \varepsilon)\, x/\log x$

$$A(1 + \delta) \log x > \{(\tfrac{1}{2} - \varepsilon)(1 + \delta) - (\tfrac{1}{2} + \varepsilon) - 2c_5\delta^2\}\, x.$$

Wählt man δ so klein, daß $\frac{1}{2}(1 + \delta) > \frac{1}{2} + 2c_5\delta^2$ wird, so ist der Ausdruck in der geschlungenen Klammer bei genügend kleinem ε positiv und also, wie behauptet, $A > c_3\, x/\log x$. Überdies ist auch die Anzahl der p_k mit $\frac{1}{2}x < p_k \leq x$, $p_{k+1} - p_k < (1 - \delta) \log k$ noch $> c_6\, x/\log x$, da $\log k \sim \log x$ für $\frac{1}{2}x < p_k \leq x$ und man δ auch durch jeden kleineren Wert ersetzen kann.

Damit erhält man nun

$$\sum_{\frac{1}{2}x < p_k \leq x} \left| \frac{p_k}{k} - \frac{p_{k+1}}{k+1} \right| \geq {\sum_{\frac{1}{2}x < p_k \leq x}}' \frac{|p_k - k(p_{k+1} - p_k|}{k(k+1)} \tag{7}$$

wobei Σ' Summation über die p_k mit $p_{k+1} - p_k < (1 - \delta) \log x$ bedeutet. Nun ist für $x > x_1(\varepsilon)$ stets $p_k > (1 - \varepsilon)\, k \log k$ und also die linke Seite von (7) mindestens

$$\sum{}' \frac{(\delta - \varepsilon) \log k}{k + 1}$$

wenn $\varepsilon < \delta$ gewählt wird und dies ist nach dem oben Bewiesenen ($c_6 < 1$)

$$\geq (\delta - \varepsilon) \sum_{\pi(x) - c_6 \frac{x}{\log x} < k \leq \pi(x)} \frac{\log k}{k + 1} > c_7 \log x,$$

wenn man $\pi(x) \sim x/\log x$ und $\sum_{n \le x} 1/n = \log x + c + O\left(\frac{1}{x}\right)$ berücksichtigt. Teilt man den Summationsbereich $(\sqrt{x}, x)$ in der Summe aus (1) nun in die Intervalle $(\frac{1}{2}x, x)$ $(\frac{1}{4}x, \frac{1}{2}x) \ldots$, so findet man die untere Schranke

$$c_7\left(\log x + \log\frac{x}{2} + \cdots + \log\frac{x}{2^m}\right), \qquad m > c \log x$$

und daraus folgt schon die Richtigkeit der unteren Schranke in (1). Um die Summe aus (1) nach oben abzuschätzen bemerken wir, daß stets $p_{k+1} > p_k$ gilt, also

$$\frac{p_{k+1}}{k+1} - \frac{p_k}{k} > -\frac{p_k}{k(k+1)} > -c_8\frac{\log k}{k} \tag{8}$$

für genügend großes k. Nun gilt

$$\sum_{p_k \le x}\left|\frac{p_{k+1}}{k+1} - \frac{p_k}{k}\right| = \sum{}'\left(\frac{p_{k+1}}{k+1} - \frac{p_k}{k}\right) + \sum{}''\left(\frac{p_k}{k} - \frac{p_{k+1}}{k+1}\right),$$

wobei $\sum'$ über diejenigen $p_k \le x$ zu erstrecken ist, für die die Differenz unter dem Betragzeichen nicht negativ ist und $\sum''$ über die übrig bleibenden p_k. Die erste Summe ist $\le p_l/l$, wenn p_l die letzte in ihr vorkommende Primzahl ist, d.h. $\sum' \le (1+\varepsilon)\log l = O(\log x)$. Weiter gilt nach (8)

$$\sum{}'' < c_8 \sum_{k \le \pi(x)} \frac{\log k}{k} = O(\log^2 x).$$

Damit ist (1) vollständig bewiesen.

Beweis von Satz 2:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $A = \frac{2}{\varepsilon}$. Die Anzahl der k_i, für die $k_{i+1} - k_i > A$ ist, ist $< 2\frac{x}{A\log x} < \varepsilon\frac{x}{\log x}$.

Seien B_m, C_m, D_m die Anzahlen der $p_{k_i} \le x$ mit $k_{i+1} - k_i = m \le A$, für welche jeweils eine der drei folgenden Ungleichungen gilt

$$(m - \varepsilon^2)\log k_i \le p_{k_{i+1}} - p_{k_i} \le (m + \varepsilon^2)\log k_i \tag{8}$$

$$p_{k_{i+1}} - p_{k_i} < (m - \varepsilon^2)\log k_i \tag{9}$$

$$p_{k_{i+1}} - p_{k_i} > (m + \varepsilon^2)\log k_i. \tag{10}$$

Wir schätzen zunächst B_m ab. Die Anzahl der $p_{k_i} \le x/\log x$ ist $O(x/\log^2 x)$ und für $x/\log x < p_{k_i} \le x$ gilt $\log k_i \sim \log x$, so daß aus (8) jedenfalls

$$(m - 2\varepsilon^2)\log x \le p_{k_{i+1}} - p_{k_i} \le (m + 2\varepsilon^2)\log x$$

folgt. Ähnlich wie beim Beweis von Satz 1 ergibt sich

$$B_m < c_9 \varepsilon^2 \frac{x}{\log x}$$

und

$$\sum_{m \leq A} B_m < c_{10} \varepsilon \frac{x}{\log x}. \tag{11}$$

Sei nun (9) erfüllt und $k_i = k$, also $k_{i+1} = k + m$. Es folgt

$$0 < \frac{p_{k+m}}{k+m} - \frac{p_k}{k} < \frac{p_k + (m - \varepsilon^2) \log k}{k+m} - \frac{p_k}{k}$$

und hieraus

$$p_k < \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{m}\right) k \log k \leq \left(1 - \frac{1}{2}\, \varepsilon^3\right) k \log k,$$

da $m \leq 2/\varepsilon$. Diese Ungleichung ist für $k > k_0(\varepsilon)$ nach dem Primzahlsatz unmöglich.

Sei schließlich (10) erfüllt und setzen wir für die folgende Rechnung wieder $k_i = k$; es folgt

$$\frac{p_{k+m}}{k+m} - \frac{p_k}{k} > \frac{p_k + (m + \varepsilon^2) \log k}{k+m} - \frac{p_k}{k} > \frac{k(m + \varepsilon^2) \log k - m(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2)\, k \log k}{k(m+k)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2 \log k}{m+k} > c_{11} \varepsilon^2 \frac{\log k}{k} \qquad \text{für } k > k_1(\varepsilon),$$

da nach dem Primzahlsatz für genügend großes k sicherlich $p_k < (1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2)\, k \log k$ gilt und da $m \leq 2/\varepsilon$. Für $p_k \leq x$ ist $k = O(x/\log x)$ und daher sicherlich auch

$$\frac{p_{k+m}}{k+m} - \frac{p_k}{k} > c_{12} \varepsilon^2 \frac{\log^2 x}{x}. \tag{12}$$

Sei nun y irgendeine Zahl mit $x/\log x < y \leq x$.

Wir wollen

$$\sum_{\frac{1}{2} y < p_{k_i},\, p_{k_{i+1}} \leq y} \left(\frac{p_{k_{i+1}}}{k_{i+1}} - \frac{p_{k_i}}{k_i}\right)$$

abschätzen. Wenn p_j/j bzw. p_l/l der kleinste bzw. größte Wert von p_{k_i}/k_i bzw. $p_{k_{i+1}}/k_{i+1}$ in diesem Intervall ist, so ist die obige Summe

$$= \frac{p_l}{l} - \frac{p_j}{j} < (1 + \varepsilon^4) \log l - (1 - \varepsilon^4) \log j \leq 2 \varepsilon^4 \log x + O(1)$$

für $x > x_0(\varepsilon)$. Daher die Anzahl der $k_i = k$, für die (12) gilt, bei festem m höchstens

$$3 \varepsilon^4 \log x / c_{12} \varepsilon^2 \frac{\log^2 x}{x} = \frac{3 \varepsilon^2}{c_{12}} \frac{x}{\log x}.$$

Dies sind für $m \leq 2/\varepsilon$ höchstens $(6\varepsilon/c_{12})\, x/\log x = \varepsilon c_{13}\, x/\log x$ Werte k_i. Teilen wir nun das Intervall $(x/\log x, x)$ in die Teilintervalle $(x/2, x)$, $(x/4, x/2) \ldots$ (die Anzahl solcher Teilintervalle ist $O(\log\log x)$), so folgt

$$\sum_{m \leq A} D_m \leq \pi\left(\frac{x}{\log x}\right) + O(\log\log x) + \varepsilon c_{13}\left(\frac{x}{\log x} + \frac{x/2}{\log(x/2)} + \cdots\right) < \varepsilon c_{14} \frac{x}{\log x}.$$

Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Bemerkungen und Folgerungen:

Sei $p_k/k = u_k$. Es folgt aus dem Primzahlsatz, daß für jedes ε und $k > k_0(\varepsilon)$

$$u_{[k(1+\varepsilon)]} > u_k \tag{13}$$

gilt.

In umgekehrter Richtung gilt: Zu jedem l gibt es unendlich viele k mit

$$\frac{p_k}{k} > \frac{p_{k+l}}{k+l}. \tag{14}$$

Dies folgt leicht daraus, daß für genügend kleines festes δ

$$p_{k+l} - p_k < (l - \delta) \log k$$

für unendlich viele k gilt, was man ähnlich wie beim Beweis von Satz 1 einsehen kann. Zwischen (13) und (14) besteht noch eine große Lücke.

Es ist noch folgendes zu vermuten: Zu jedem ε gibt es ein $l = l(\varepsilon)$ so, daß für alle $p_k < x$ mit Ausnahme von $\varepsilon \frac{x}{\log x}$ Werten von k

$$\frac{p_k}{k} < \max_{1 \leq i \leq l} \frac{p_{k+i}}{k+i} \tag{15}$$

gilt. (15) würde natürlich folgen, wenn man zeigen könnte, daß für alle k mit Ausnahme von $\varepsilon x/\log x$ Werten von k es ein i, $1 \leq i \leq l$ gibt, so daß

$$p_{k+i} - p_k > (i + \eta) \log k \tag{16}$$

$(\eta > 0$ fest) gilt.

Aus Satz 2 folgt, daß mit Ausnahme von höchstens $O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ Primzahlen $p_k < x$

$$\frac{p_k}{k} < \max_{1 \leq i < k} \frac{p_{k-i}}{k-i} \tag{17}$$

gilt. Es folgt auch, daß mit Ausnahme von $O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ solchen Primzahlen gilt:

$$\frac{p_k}{k} > \min_{1 \leq i < \infty} \frac{p_{k+i}}{k+i}. \tag{18}$$

Es ist zu vermuten, daß folgendes gilt: Es gibt kein k oder nur endlich viele k mit

$$\max_{1\leq i<k} \frac{p_{k-i}}{k-i} < \frac{p_k}{k} < \min_{1\leq i<\infty} \frac{p_{k+i}}{k+i}.$$

Eine weitere Frage ist die, ob die untere Dichte der k-Werte, für die $\frac{p_k}{k} < \frac{p_{k+1}}{k+1}$ bzw. $\frac{p_k}{k} > \frac{p_{k+1}}{k+1}$ gilt, positiv ist. Im letzteren Fall ist dies so einzusehen: Es ist $\frac{p_k}{k} > \frac{p_{k+1}}{k+1}$ gleichbedeutend mit $k(p_{k+1} - p_k) < p_k$. Wie beim Beweis von Satz 1 stellt man fest, daß die p_k mit $p_{k+1} - p_k < (1-\delta)\log k$ positive Dichte haben, wenn δ genügend klein (von k unabhängig) gewählt wird. Da für alle genügend großen k stets $p_k > (1-\delta)\, k \log k$ gilt, ergibt sich für diese k sicherlich $k(p_{k+1} - p_k) < p_k$. Es scheint schwierig zu sein, zu beweisen, daß die k mit $\frac{p_k}{k} < \frac{p_{k+1}}{k+1}$ positive untere Dichte haben.

Eine andere Frage wäre, ob es unendlich oft vorkommen kann, daß

$$\frac{p_k}{k} > \frac{p_{k+1}}{k+1} > \frac{p_{k+2}}{k+2}.$$

Schließlich bemerken wir, daß man in Satz 2 die Größenordnung $o(x/\log x)$ mit derselben Beweismethode durch $O(x/\log^{1+\delta} x)$, bei genügend kleinem δ, ersetzen kann (z.B. kann jedes $\delta < \frac{1}{4}$ genommen werden). Man hat in dem Beweis nur ε durch $(\log x)^{-\delta}$ zu ersetzen und statt des Primzahlsatzes die genauere Beziehung $k = \frac{p_k}{\log p_k} + O\left(\frac{p_k}{\log^2 p_k}\right)$ zu verwenden.

Eingegangen am 9. 1. 1961