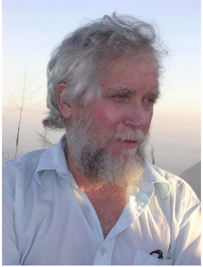
Szemerédi Endre matematikája
"csiszoltabb változat"

Simonovits Miklós
Rényi Institute, Budapest



1940–

1802–1829

Az előadás Szemerédi Abel díjának (egyik) ünneplése, (2012 ápr. 23.)
A kiegészítések többsége ilyen keretbe került.

On Niels Henrik Abel

- Az 5-ödfokú polinom=0 gyökképletes megoldhatatlansága
- Csoportelmélet (I. Abel csoportok)
- Elliptikus függvények

Amivel mi találkozunk:

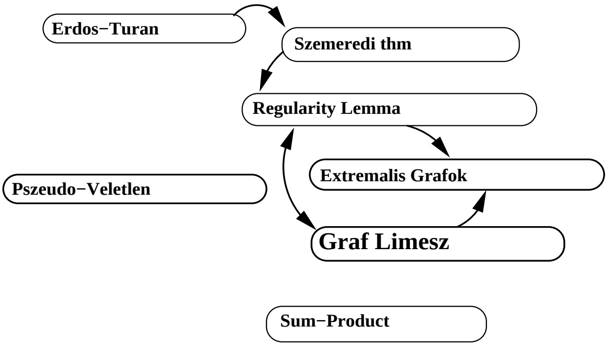
- Abel szummáció
- Abel tétel (analítikus függvények, konvergencia)
- Abel átrendezés

Szemerédi Endre matematikája

Szemerédi Endre generációm nemzetközi viszonylatban egyik legkiemelkedőbb matematikusa. Környezetemben mindenki nagyon örült, hogy Endre egy ilyen nagy elismerést kapott, az Abel Díjat. Persze, itt kell megemlítenem, hogy Endre korábban is kapott már több kiemelkedően fontos matematikai díjakat.

Endre tiszteletére tartott előadásomban megpróbálok egy nem-technikai jellegü ízelitőt adni Endre matematikai teljesítményéről, elsősorban a hozzám közel állo területekről.

Vázlat?



- Erdős-Turán sejtes megoldasarol, a
- Regularitási Lemmáról,
- az utóbbi némely alkalmazásáról a kombinatorikában,
- a Szemerédi-Trotter illeszkedés-becslési tételről,
- Szemerédi hatásáról a kombinatorikában.
- Szemerédi hatásáról az Elméleti Számítógéptudományban.

Miről nem beszélek?

Endre sok fontos tételét idő hiányban átugrom:

- Korai számelméleti tételek, Erdőssel és Sárközyvel.

- Bizonyos kombinatorika tételeit,
- Bizonyos számítógéptudománybeli tételeit.
- Bizonyos geometriai tételeiről,

A kép Columbus Ohio-ban készült, ahol egy konferencia-partin (Hypergraph Seminar, 1972) Erdős és Divis Szemerédi egy cikkét olvassák, vitatják.

Professzoraink

Grätzer, Erdős, Turán, Rényi Dobogókő (195?), **Rényi Kató, Turán, Sós Vera, Erdős Lake Louise (1962)**

Szemerédi tétel: Az előzmények és a tétel

1. Tétel (Van der Waerden)

Ha adott egy „színszám", ℓ, és egy számtani sor hossz, k, akkor megszínezve $\mathbb{N}$-et ℓ színnel, lesz egy monokromatikus k hosszúságú számtani sor a színezésben.

Sejtés (Erdős-Turán)

Ez (vdW) következik a megfelelő sűrűségi verzióból: Ha $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$ alsó sűrűsége pozitiv, akkor minden k-ra van k-tagú számtani sorozat $\mathbb{A}$-ban.

2. Tétel (Szemerédi)

IGEN!

$$r_k(n) = o(n).$$

Magyarázat: $r_k(n)$-ről

Definició

$r_k(n) :=$ a maximális sok egész szám $[1, n]$-ben k-tagú számtani sor nélkül, pontosabban ennek számossága.

- Van der Waerden: Ramsey típusú tétel
- Szemerédi tétele sűrűségi tétel, vdW azonnal következik belőle.
- K. F. Roth: Fields medal, ... $r_3(n) = o(n)$.
- Tim Gowers: Fields medal, ... $r_k(n)$-hez kapcsolódó

Terry Tao Fields Medaljában is fontos szerepet játszottak a Szemerédihez kapcsolódó eredményei

$r_k(n)$-tól a Green-Tao-ig

Van-e minden $k > 3$ egészre olyan k-tagú számtani sor, amelyikben minden tag prímszám.

Erdős említi a cikket a BJMT „Paul Erdős is 80"-beli cikkében, akkor még csak 18 tagú sort ismertek, komputer segítséggel

Sejtés (Erdős sejtés)

Ha egészek egy $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$ sorozatára

$$\sum \frac{1}{a_i} = \infty$$

akkor minden k-ra $\mathbb{A}$ tartalmaz k hosszúságú számtani sort.

3. Tétel (Green-Tao)

Van akármilyen hosszú számtani sor prímekből.

$r_k(n)$: merre tovább?

Ergodelméleti bizonyítás: Fürstenberg
Fürstenberg-Katznelson: többdimenziós
Leibman, ...
Polinomiális

A Fürstenberg-Katznelson féle ergodelmáleti hozzáállás akkor vált igazán meggyőzővé, amikor a kombinatorikus hozzáállással elérhetetlennek tűnő tételeket is elérhetővé tett.

Gowers munkássága azonban nagy mértékben visszahozta ezt a területet is a „klasszikus matematikába".

Hales-Jewett tétel

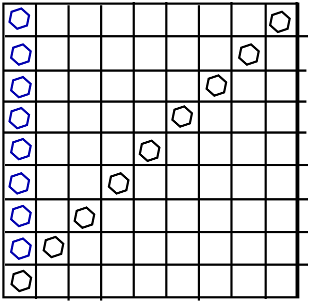
Ez a vdW-nek általánosítása, bár ez nem látszik azonnal.
Csak vázlatosan mondom ki! mert kívülállónak bonyolult, technikai.

- Adott a színszám, mondjuk 23. Egy nagyon nagy dimenziós kockát: $[1, m]^d$-t színezünk 23 színnel. Ekkor, ha tehát d elég nagy, akkor minden színezésben van
MONOKROMATIKUS KOMBINATORIKUS EGYENES.

A kombinatorikus egyenes egy olyan vektor-sorozat, ahol mindegyik koordináta vagy konstans, vagy 1,2,...,m.

- Hales-Jewett tétel egy Ramsey típusú tétel (sokak szerint az egyik legfontosabb?) de ez is rendelkezik sűrűségi általánosítással: density version. (Fürstenberg–Katznelson)

Density Hales-Jewett



Eredete Kombinatorikus Játékelméleti. Szoktuk játszani, Amőba, vagy OX néven. (?) Tetszőleges k-uniform hipergráfon értelmezhető a van der Waerden is, és annak sűrűségi változata is (?).

4. Tétel (Fürstenberg-Katznelson (komb.: Polymath!!!))

Adott m kockaméretre és $\varepsilon > 0$ alsó sűrűségre létezik olyan d dimenzió, melyre ha kiválasztjuk a d-dimenziós m-kocka. εm^d rácspontját, az mindíg tartalmaz KOMBINATORIKUS EGYENEST.

Arithmetic Progressions in sumsets

4. Tétel (Szemerédi-Van Vu, Finite sumset)

Legyen $\mathcal{A}$*-ra*

$$\mathcal{A}_S := \left\{ \sum_{x \in B} x \ : \ B \subseteq \mathcal{A} \text{ és } |B| < \infty \right\}$$

Ha $c > 0$ *elég nagy, és*

$$|\mathcal{A} \cap [n]| > c\sqrt{n},$$

akkor $\mathcal{A}$ *sum-set-je,* $\mathcal{A}_S$ *tartalmaz* n *hosszúságú AP-t.*

- Analog tételek $\ell\mathcal{A}$-ra és $\ell^*\mathcal{A}$-ra,

ahol $\ell\mathcal{A}$ az ℓ-tagú összegek $\ell^*\mathcal{A}$ pedig az ℓ különböző tagú összegek halmaza.

A regularitási lemma: mit mond ki?

Az állítás heurisztikusan: Minden G_n gráf approximálható általánosított véletlen gráffal

Jelölés:

$$d(X,Y) := \frac{e(X,Y)}{|X||Y|}.$$

Definició (ε-reguláris csúcshalmaz-pár)

Adott egy G gráf. $A, B \subseteq V(G)$ (diszjunkt) halmazpár ε-reguláris, ha minden $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$-re, ahol $|X| > \varepsilon|A|$, $|Y| > \varepsilon|B|$, teljesül

$$|d(X,Y) - d(A,B)| < \varepsilon.$$

A Szemerédi Regularitási Lemma

4. Tétel (Szemerédi, 1976 (?))

Minden $\varepsilon > 0$*-ra és* $\kappa \in \mathbb{N}^+$*-ra létezik olyan* M *egész, hogy minden* G_n *gráfnak van olyan csúcspartíciója,*

$$V(G_n) = U_1 \cup U_2 \cup \dots U_k, \qquad |U_i| \approx \frac{n}{k}.$$

ahol $\kappa < k < M$ *és majdnem mindegyik* (U_i, U_j) ε*-reguláris: legfeljebb* $\varepsilon\binom{k}{2}$ *halmazpár kivételével mindegyik,*

A Regularity Lemma születése

- Eredeti, komplikált verzió
- A kvantitative Erdős-Stone: Adott G_n, és

$$e(G_n) \geq \left(1 - \frac{1}{p}\right) \binom{n}{2} + cn^2, \tag{1}$$

Legyen

$$m(n,p,c) = \max\{t : K_{p+1}(t,t,\dots,t) \subset G_n \text{ subject to } (1)\}.$$

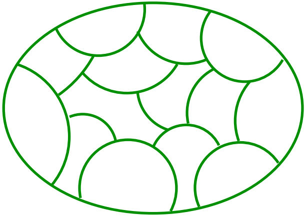
5. Tétel (Kvantitativ Erdős-Stone)

$$m(n,p,\varepsilon) \approx c(p,\varepsilon,k) \log n.$$

- Erdős-Stone
- Bollobás-Erdős, Bollobás-Erdős-Sim.
- Chvatál-Szemerédi: pontos, és ehhez bizonyította SZE...

The Regularitási Lemma

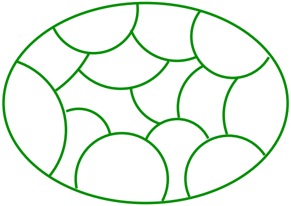
Mihelyst Szemerédi bebizonyította a Regularitási Lemma-t, az Extremális Gráfelmélet teljesen megváltozott .



Theorem (Szemerédi)

For every $\varepsilon > 0$ every graph G_n has a vertex-partition into a bounded number of classes $U_1, \dots, U_k$ of almost equal sizes so that for all but at most $\varepsilon\binom{k}{2}$ pairs i, j the bipartite graph (generated by G_n) is ε-regular

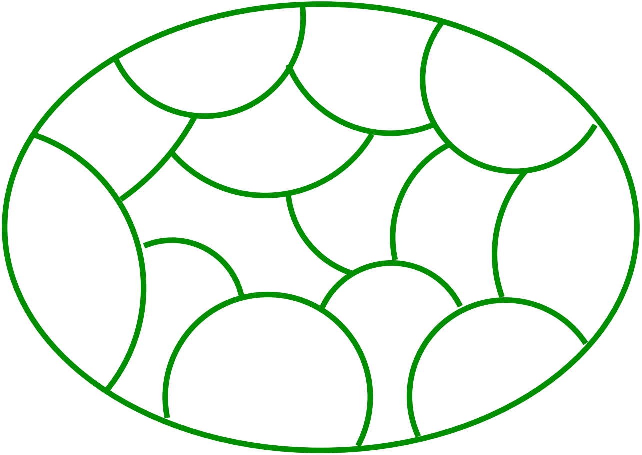
The regularity lemma, precisely



Theorem (Szemerédi)

For every $\varepsilon > 0$ and integer k every graph G_n has a vertex-partition into the classes $U_1, \dots, U_k$ of almost equal sizes, for some $\kappa < k < K(\varepsilon, \kappa)$ so that for all but at most $\varepsilon\binom{k}{2}$ pairs i, j the bipartite graphs (generated by G_n) are ε-regular.

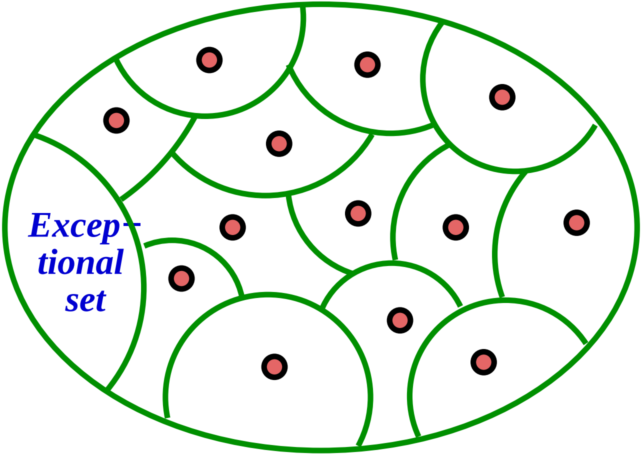
The reduced (or cluster) graph



Fix two parameters: ε and $\tau \gg \varepsilon$

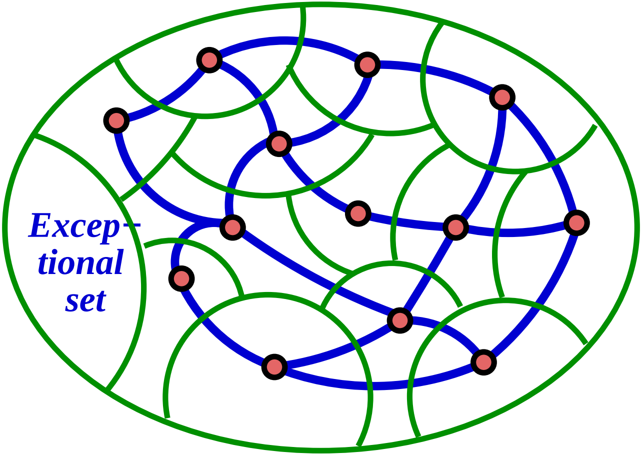
Start with the Szemerédi partition $U_1, \ldots, U_p$.

The reduced (or cluster) graph



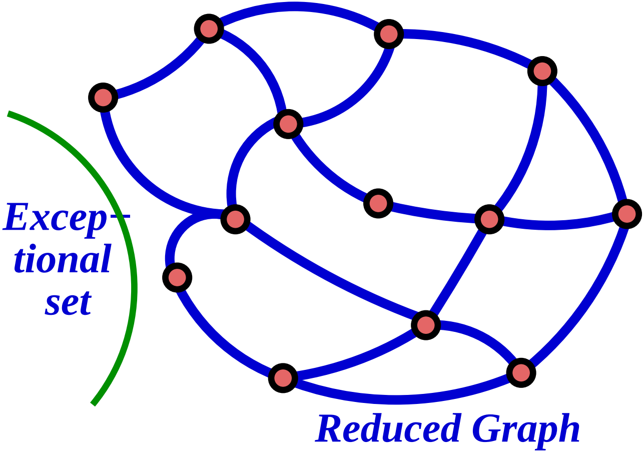
Build a graph on the classes: the vertices of H_k are the classes

The reduced (or cluster) graph



Connect the pairs of classes (U_i, U_j) by a cluster-edge if they are classes ε-regularly connected, with density $d(U_i, U_j) > \tau$

The reduced (or cluster) graph



The vertices of U_0 are often distributed (randomly) in the others

A H_k és G_n

Ismerve H_k-t, sok mindent megtudunk G_n-ről.

- Mert véletlenszerűvel közelít
- és a véletlenszerűben sok minden könnyebb.

A Regularitási Lemma korai sikerei

Probléma (Brown-Erdős-T.Sós)

Határozzuk vagy becsüljük meg $f(n, k, \ell)$-t.

Az első nehéz eset $(6, 3)$:

6. Tétel (Ruzsa-Szemerédi)

$$cnr_3(n) < f(n, 6, 3) = o(n^2)$$

Ramsey-Turán

Turán tétel alkalmazásai
Turán: geometriában, analízisben, . . .
Katona: Valószínűségszámításban

Ramsey-Turán

- Ramsey-Turán kezdete: Turán, Sós Vera, Erdős
- Endre Regularitási Lemmájának egyik első alkalmazása (!?!)

7. Tétel (Legegyszerűbb nemtriviális Ramsey-Turán)

$$\mathbf{RT}(n, K_4, o(n)) \leq \frac{1}{8}n^2 + o(n^2).$$

Ramsey-Turán folytatás

- Bollobás-Erdős konstrukció
- Erdős-Hajnal-Sós-Szemerédi
- Erdős-Hajnal-Sós-Sim.-Szemerédi
- Balogh-Lenz

Másfajta Regularitási Lemmák

- Frieze-Kannan: Gyengébb konkluzió de kisebb osztályszám
  - Iterálva kiadja az eredeti RL-t.
  - Ugyanez jelenik meg Lovász-B. Szegedy-ben
- Kohayakawa-Rödl: Ritka gráfokra (de csak limitációval)
  - Átsegít bizonyos nehézségeken.
- Alon-Fischer-Krivelevich-M. Szegedy: ε-kontrollált osztályszám

A Blow-Up lemma

Komlós-Sárközy-Szemerédi
Gyakran könnyű majdnem feszítő részgráfot találni, de nehéz feszítőt. Ezt teszi a Blow-Up Lemma
Pósa-Seymour conjecture, stb

A Turán tétel „javítása”

7. Tétel (Ajtai-Komlós-Szemerédi)

(a) Ha egy G_n gráf átlagfoka t, akkor

$$\alpha(G_n) \geq \frac{n}{t} \qquad (Turan)$$

(b) Ha azonban $K_3 \not\subseteq G_n$ is teljesül, akkor

$$\alpha(G_n) \geq c\frac{n}{t}\log t. \qquad (AKSz)$$

Élesíthető! Döntő áttörésekhez vezet!

(i) Megcáfolja a Heilbronn sejtést geometriában

(ii) Javít a Sidon becslésen: döntő áttörés

(iii) Javít a Ramsey becslésen

Háromszög Ramsey

Definició (Ramsey:)

$R(s,t)$ a legkisebb n egész melyre K_n minden Piros-Kék szinezése vagy tartalmaz egy Piros K_s-t vagy egy Kék K_t-t

$R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1}$. Hence $R(3,t) < t^2$.

8. Tétel (Ajtai-Komlós-Szemerédi)

$$R(3,t) < (1+o(1))\frac{t^2}{\log t}.$$

9. Tétel (Jeong Han Kim)

$$R(3,t) \ge (c-o(1))\frac{t^2}{\log t}.$$

for some $c > 0$.

So $R(3,t) \sim t^2/\log t$.

Hatása algoritmuselméletben

Parallel Sorting

Bináris rendezés (sorting): Minden lépésnek legfeljebb két kimenete van.

Legalább $\log n! \approx n \log n$ elágazásra van szükség, és ennyi elég is.

Probléma (D. E Knuth?)

Lehet-e ezt teljesen párhuzamosítani?

Ismert volt: $c \log^2 n$ elég (Batcher algorithm)

10. Tétel (Ajtai-Komlós-Szemerédi)

Van $c \log n$ lépésben sorbarendező "sorting network" (és véletlen helyett expandert használ).

Mi az a Sort-olás?

Párhuzamos sorbarendezés: megtehető-e $c \log n$ menetben?
Van-e "sorting network" $c \log n$ menetben?

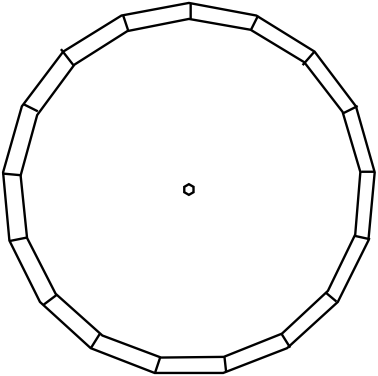
Mi az a Hash-elés?

D. E. Knuth: A zenélő székek problémája

11. Tétel (Ajtai–Komlós-Szemerédi)

"There is no fast single hashing algorithm" Information Processing Letters, 1978 Elsevier

Nagy blokkok keletkezése
Double Hashing



Algoritmizálható-e a Regularitási Lemma?

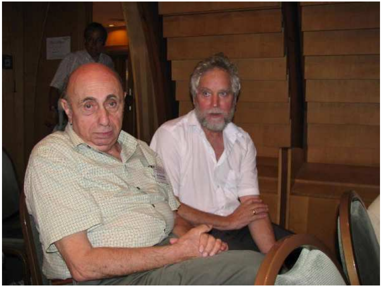
Alon-Duke-Rödl-Yuster
Frieze-Kannan

- Igen, találhatunk egy R-Particiót, gyorsan.
- NEM: nem tudjuk eldönteni egy partícióról, hogy az jó-e.

Hajnal-Szemerédi Thm

Definició (Equitable k-coloring)

G olyan jó-szinezése, ahol a színosztályok méretei legfeljebb 1-gyel különböznek.



12. Tétel (Hajnal and Szemerédi 1970)

Ha $\Delta(G) \leq r$, *akkor* G*-nek van „equitable" ($r+1$)-színezése.*

13. Tétel (Mydlarz és Szemerédi)

létezik polinomiális idejű algoritmus ennek megtalálására.

Pósa-Seymour sejtés

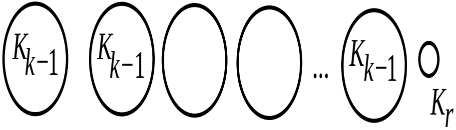
Sejtés (Pósa-Seymour, Erdős sejtés erősítése)

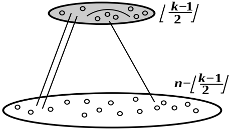
Minden G gráfra, ha $\delta(G) \geq (k+1)|G|$, akkor G tartalmazza egy Hamilton kör k-ik hatványát.

13. Tétel (Komlós-G. Sárközy-Szemerédi: IGEN!)

Minden G gráfra, ha $\delta(G) \geq (k+1)|G|$, akkor G tartalmazza egy Hamilton kör k-ik hatványát.

Erdős-Sós/Komlós-Sós sejtés





14. Tétel (Ajtai-Komlós-Sim.-Szemerédi)

Létezik olyan k_0, hogy $k > k_0$-ra igaz az Erdős-Sós sejtés:

$$\mathbf{ex}(n, T_k) \le \frac{1}{2}(k-2)n.$$

Ugyancsak igaz nagy k-ra a Komlós-Sós sejtés:

15. Tétel (Ajtai-Hladky-Komlós-Piguet-Sim.-Stein-Szemerédi)

Létezik olyan k_0, hogy $k > k_0$-ra igaz az Komlós-Sós sejtés: Ha G_n-ben legalább $n/2$ pont $\ge k$ fokú, akkor G_n minden k-pontú fát tartalmaz.

Property Testing

Alon-Shapira: Azok a $\mathcal{P}$ tulajdonságok tesztelhetőek, amelyek a Regularitási Lemma miatt tesztelhetőek.

Sum-Product

15. Tétel (Erdős-Szemerédi)

Ha adott egy $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$, *n-elemű halmaz, akkor vagy* $|\mathbb{A} + \mathbb{A}|$ *vagy* $|\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}|$ *nagy: létezik olyan* $c > 0$, *hogy*

$$|\mathbb{A} + \mathbb{A}| \cdot |\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}| > n^{2+c}$$

Elekes
Solymosi
Bourgain
...

Sums and Products

ERDŐS-SZEMERÉDI, **A jelenség:** n egész esetén lehet, hogy a **páronkénti összegek** kevesen vannak, pl. a számtani sornál, lehet, hogy a **szorzatok** kevesen vannak, pl. a geometriai sornál, de **nem lehet, hogy mindketten kevesen vannak**:

17. Tétel (Erdős-Szemerédi, E1983-18)

Legyen $1 \le a_1 < a_2 \cdots < a_n$ egészek egy sorozata. Képezzük belőlük az összes kéttagú összeget és szorzatot. Legyen $f(n)$ a minimuma az igy kapott ,,összeg-szorzat" halmaz elemszámának. Ekkor

$$n^{1+c_1} < f(n) < \frac{n^2}{e^{c \log n / \log\log n}}.$$

Kicsit gyengébb a sejtett n^{2-c}-nél

General conjecture

Sejtés (Erdős-Szemerédi)

Ha 2-szeres helyett k-szoros összegeket és szorzatokat veszünk, akkor legalább $n^{k-\varepsilon}$ számot kapunk.

Geometria, Szemerédi-Trotter

A Wikipediában ez is egy külön fejezet!

18. Tétel (Point-line incidences)

Ha adott n pont és m egyenes, akkor az illeszkedésszám

$$O(n^{2/3}m^{2/3} + n + m).$$

Éles.

19. Tétel (Pach-Sharir féle általánosítás)

Ha adott a síkban n pont és m görbe és ..., akkor az illeszkedésszám

$$I(P, \mathcal{C}) < c(b, s) \cdot \left(n^{k/(2k-1)} m^{(2k-2)/(2k-1)} + n + m\right).$$

Általánosítások, alkalmazások?

- Solymosi-Tao
- Elekes-Szabó ($\longrightarrow$ Elekes-Sim.-Szabó)

Graph Limits

A Lovász-Szegedy, majd Borgs-Chayes-Lovász-Sós-Vesztergombi és mások által kifejlesztett új elmélet nagyon szorosan kapcsolódik a Szemerédi Regularitasi Lemmához.

Összefoglaló

- Kiemelkedő bizonyítóerő
- Áttörő tételek
- áttörő módszerek.

$\Longrightarrow$ Óriási hatás

Amire a legbüszkébb?