Diplomamunka

Kis halmazok, nagy halmazok, Hausdorff-dimenzió

Maga Péter

Témavezető: **Keleti Tamás**

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

2009.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném köszönetemet kifejezni Keleti Tamásnak, témavezetőmnek, az érdekes problémákért, a diplomamunka alapos ellenőrzéséért, értékes észrevételeiért és megjegyzéseiért.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezető

1.1. Kérdések

Dolgozatunkban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy fontos topologikus terek részhalmazainak mérték-, illetve dimenzióelméleti nagysága mennyiben függ össze geometriai nagyságukkal.

Elöljáróban emlékeztetünk Lebesgue sűrűségi tételére, mely szerint minden mérhető halmaz majdnem minden pontja sűrűségi pont. Ennek a tételnek egy egyszerű következménye, hogy $\mathbb{R}^d$ minden pozitív mértékű A részhalmazára, és tetszőleges B véges részhalmazára van olyan φ hasonlósága $\mathbb{R}^d$-nek, melyre $\varphi(B) \subset A$.

Egyik fontos kérdéskörünk éppen ezen észrevétel köré szerveződik. Lehet-e valamilyen értelemben „nagy” halmazt találni, ami bizonyos véges mintákat nem tartalmaz?

Egy másik alapvető probléma a következő: egy adott halmaznak hány eltoltjával lehet lefedni a teret? Ha a halmaz nullmértékű, akkor megszámlálhatónál több eltoltra van szükség. Kell-e biztosan kontinuum?

Az alaptér minden kérdés vizsgálatakor $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$ vagy egy provéges csoport lesz.

Hogy mikor melyik, azt a következő szempontok alapján állítjuk össze: hol érdekes leginkább az adott kérdés; hol tudunk újabb eredményt bemutatni; hol tudjuk legjobban érzékeltetni a tétel vagy a bizonyítás lényegét (hol van kevesebb technikai részlet).

1.2. Dimenziófogalmak

Legfontosabb dimenziófogalmunk a Hausdorff-dimenzió. Legyen (X,d) tetszőleges metrikus tér, $A \subseteq X$ pedig Borel-részhalmaza.

1.1. Definíció (Hausdorff-dimenzió)**.** Legyen $\delta > 0$, és legyen

$$\mu_\delta^s(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{diam}(A_n))^s \mid \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A, \mathrm{diam}(A_n) < \delta\right\},$$

ez nyilván monoton nő, amint $\delta \to 0$. Legyen tehát

$$\mu^s(A) = \lim_{\delta\to 0}\mu_\delta^s(A),$$

ez A s-dimenziós Hausdorff-mértéke.
Továbbá

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) = \sup\{t \mid \mu^t(A) = \infty\}(= \inf\{t \mid \mu^t(A) = 0\})$$

A Hausdorff-dimenziója.

Minden Borel-halmaznak van Hausdorff-dimenziója, ennek bizonyítása megtalálható Laczkovich M. jegyzetében [L, 99. oldal].

Egy későbbi kérdést a box-dimenzió szempontjából vizsgálunk meg.

1.2. Definíció (box-dimenzió)**.** Legyen A korlátos. Legyen $N_r(A)$ az a szám, ahány r sugarú nyílt gömbre van szükség A befedéséhez. Legyen

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(A) = \liminf_{r\to 0}\frac{\log(N_r(A))}{\log(1/r)}; \quad \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(A) = \limsup_{r\to 0}\frac{\log(N_r(A))}{\log(1/r)}$$

rendre A alsó és felső box-dimenziója. Ha megegyeznek, akkor legyen $\dim_{\mathrm{B}}(A) = \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(A) = \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(A)$ A box-dimenziója.

Megjegyezzük, hogy nincs minden kompakt halmaznak box-dimenziója, még $\mathbb{R}$-en is könnyű olyan A kompakt halmazt konstruálni, melyre $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(A) = 0$, $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(A) = 1$.

A box-dimenzió segítségével definiáljuk a pakolási dimenziót.

1.3. Definíció (pakolási dimenzió)**.** Legyen A tetszőleges. Ekkor

$$\dim_{\mathrm{P}}(A) = \inf \left\{ \sup_i \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(A_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

A pakolási dimenziója, ahol az A fedésében használt A_i-k korlátosak.

Megjegyezzük, hogy ez valójában csak a felső pakolási dimenzió. Az alsót az alsó box-dimenzióból lehetne származtatni.

2. fejezet

Eszközök

2.1. Egy fraktálgeometriai tétel

A Hausdorff-dimenzió alulról történő megbecslése általában nehezebb feladat, mint a felülről történő becslés. Utóbbihoz elegendő ugyanis jó fedéseket találni, míg előbbihez minden fedésre vonatkozóan kell kijelentéseket tenni. Most K. Falconer [Fal, 4.6.] egy egydimenziós tételét általánosítjuk magasabb dimenzióra, bonyolult, de használható eszközt nyerve halmazok Hausdorff-dimenziójának alsó becslésére.

2.1. Lemma. *Legyen adott az $U \subseteq \mathbb{R}^d$ korlátos halmaz, $l > 0$, és a $B \subseteq U$ véges halmaz. Ekkor ha $|B| > (2\mathrm{diam}(U)\sqrt{d}/l + 1)^d$, akkor van B-nek két olyan pontja, amelyek távolsága kisebb, mint l (ahol $|B|$-vel B elemszámát jelöljük).*

Bizonyítás. Legyen $l' < l$, de csak annyival, hogy még $|B| > (2\mathrm{diam}(U)\sqrt{d}/l' + 1)^d$ is fennálljon. U beletehető egy olyan zárt K kockába, melynek éle $\mathrm{diam}(U)$. Vegyünk fel ebben a kockában egy olyan (K-val párhuzamos élű) kockarácsot, melyben a szomszédos rácspontok távolsága $l'/(2\sqrt{d})$. Világos, hogy ennek a rácsnak az elemszáma legfeljebb $(2\mathrm{diam}(U)\sqrt{d}/l' + 1)^d$, és ha ennél több pontú B, akkor van két olyan eleme, amelyekhez legközelebbi rácspont megegyezik, továbbá az attól vett távolság mindkettő esetében legfeljebb $l'/2$. Ezen két pont távolsága legfeljebb $l' < l$. □

2.2. Tétel. *Legyen $\mathbb{R}^d$-ben $F = \cap_{k=1}^{\infty} E_k$, ahol E_k-k kompakt, kis kockákból álló halmazok, E_0 egyetlen kocka. Tegyük fel, hogy minden $k \geq 1$-re, $E_k \subseteq E_{k-1}$, és E_{k-1} minden kis kockája legalább m_k^d darab kis kockát tartalmaz E_k-ból, továbbá hogy ezek a kis kockák olyanok, hogy a távolságuk páronként legalább ε_k, ahol $0 < \varepsilon_k < \varepsilon_{k-1}$ fennáll minden $k \geq 1$-re, és $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Tegyük fel továbbá, hogy minden k-ra $m_k\varepsilon_k < 1$. Ekkor*

$$\dim_{\mathrm{H}}(F) \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{d\log(m_1 \cdot \ldots \cdot m_{k-1})}{-\log(m_k\varepsilon_k)}.$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy E_{k-1} minden kockája m_k^d darab kockát tartalmaz E_k-ból (ha a többit elhagyjuk, a feltételek nem változnak). Legyen μ valószínűségi mérték, melynek tartója F, és amelyre nézve E_k minden kis kockájának mértéke $(m_1 \cdot \ldots \cdot m_k)^{-d}$. Legyen U tetszőleges korlátos halmaz, melyre $0 < \mathrm{diam}(U) < \varepsilon_1$. Megbecsüljük $\mu(U)$-t. Legyen k olyan, hogy $\varepsilon_k \leq \mathrm{diam}(U) < \varepsilon_{k-1}$.

Egyrészt U legfeljebb csak egy E_{k-1}-beli kockát metsz, azaz legfeljebb m_k^d darab E_k-belit. Másrészt az előző lemma szerint E_k-beli kockákból nem metszhet $(2\mathrm{diam}(U)\sqrt{d}/\varepsilon_k + 1)^d \leq (4\mathrm{diam}(U)\sqrt{d}/\varepsilon_k)^d$-nél többet. Azaz:

$$\mu(U) \leq (m_1 \cdot \ldots \cdot m_k)^{-d} \min\{(4\mathrm{diam}(U)\sqrt{d}/\varepsilon_k)^d, m_k^d\} \leq$$

$$(m_1 \cdot \ldots \cdot m_k)^{-d}((4\mathrm{diam}(U)\sqrt{d}/\varepsilon_k)^s m_k^{d-s})$$

minden $0 \leq s \leq d$-re.

Ekkor

$$\frac{\mu(U)}{(\mathrm{diam}(U))^s} \leq \frac{(4\sqrt{d})^s}{(m_1 \cdot \ldots \cdot m_{k-1})^d m_k^s \varepsilon_k^s},$$

ami $s < \liminf_{k\to\infty} \frac{d\log(m_1 \cdot \ldots \cdot m_{k-1})}{-\log(m_k\varepsilon_k)}$ esetén felülről korlátos valamilyen $K > 0$ korláttal.

Ekkor valamely $\delta > 0$ esetén $(\mathrm{diam}(U))^s \geq \mu(U)/K$ minden olyan U-ra, melynek átmérője legfeljebb δ. Ekkor ha F-et δ-nál kisebb átmérőjűekkel fedjük, akkor az s-dimenziós Hausdorff-mértéket közelítő összeg legalább $1/K$. □

2.2. Hutchinson tételei

Önhasonló halmazok esetében a Hausdorff-dimenziót pontosan is meg tudjuk mondani. Ezen — nagyon speciális — esetre vonatkoznak a következő tételek, melyek megtalálhatók Laczkovich M. jegyzetében [L, 105-110. oldal].

2.3. Definíció. Legyenek $f_1, \dots, f_n$ az $\mathbb{R}^d$ tér kicsinyítései, azaz olyan hasonlóságok, melyeknek arányára $0 < q_i < 1$ $(1 \le i \le n)$. Ekkor legyen A az $f_1, \dots, f_n$ hasonlóságokhoz tartozó önhasonló halmaz, amennyiben A nemüres, kompakt, valamint $A = \cup_{i=1}^n f_i(A)$.

Minden $\{f_1, \dots, f_n\}$ halmazához ilyen hasonlóságoknak van egy egyértelmű önhasonló (nemüres, kompakt) halmaz. A cél ezen halmaz Hausdorff-dimenziójának meghatározása.

2.4. Tétel (Hutchinson)**.** *Legyen A az $f_1, \dots, f_n$ hasonlóságokhoz tartozó önhasonló halmaz, ahol az f_i hasonlóságok aránya rendre* $0 < q_i < 1$*, valamint az* $f_i(A)$ *halmazok legyenek páronként diszjunktak. Ekkor* $\dim_{\mathrm{H}}(A) = s$*, ahol* $\sum_{i=1}^n q_i^s = 1$*, sőt,* $0 < \mu^s(A) < \infty$*.*

Kicsit gyengébb feltevések is ugyanezt implikálják.

2.5. Tétel (Hutchinson)**.** *Legyen A az $f_1, \dots, f_n$ hasonlóságokhoz tartozó önhasonló halmaz, ahol az f_i hasonlóságok aránya rendre* $0 < q_i < 1$*. Tegyük fel továbbá, hogy létezik egy G nemüres, nyílt halmaz, melyre $f_i(G) \subseteq G$ minden $1 \le i \le n$-re, és az $f_i(G)$-k páronként különböznek. Ekkor* $\dim_{\mathrm{H}}(A) = s$*, ahol* $\sum_{i=1}^n q_i^s = 1$*, sőt,* $0 < \mu^s(A) < \infty$*.*

Az előkerülő függvényre bevezetjük a következő jelölést. Ha $0 < q_1, \dots, q_n < 1$, akkor legyen $h(q_1, \dots, q_n)$ az a nemnegatív, valós s, melyre $\sum_{i=1}^n q_i^s = 1$. Ez a függvény értelmes, jóldefiniált, hiszen $\sum_{i=1}^n q_i^0 = n$, $\lim_{t\to\infty}(\sum_{i=1}^n q_i^t) = 0$, valamint $\sum_{i=1}^n q_i^t$ t-ben szigorúan monoton csökken és folytonos.

A tételek egy egyszerű alkalmazásaképpen adódik, hogy ha C a triadikus Cantor-halmaz, akkor $\dim_{\mathrm{H}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ (az önhasonlóságot megadó kontrakciók: $f_1(x) = \frac{1}{3}x$, $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$).

2.3. Egy kombinatorikus konzisztenciatétel

2.6. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (ahol ∞ most megszámlálható végtelent jelöl). Ekkor a $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$-t f-szlalomnak nevezzük, ha minden A_n elemszáma legfeljebb $f(n)$. Legyen adott f és egy $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ f-szlalom. Azt mondjuk, hogy $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ egy részszlalom-méret, ha minden n-re $g(n) \leq f(n)$. Ekkor $\prod_{n=1}^{\infty} B_n$ g-részszlalom, ha g-szlalom, és minden n-re $B_n \subseteq A_n$.*

Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ahol $1 \leq g(n) < f(n)$. Tegyük fel, hogy $f(n)$ és $g(n)$ tart a végtelenbe. Ekkor a halmazelmélet szokásos ZFC-axiómarendszerével konzisztens, hogy minden f-szlalomot kontinuumnál kevesebb g-részszlalom fed [ES, 9-10. oldal]. Ha a ZFC-hez a kontinuumhipotézist hozzávesszük, akkor a függetlenség megszűnik, és csak kontinuum sok g-részszlalommal lehet egy f-szlalomot lefedni.

Ez a kombinatorikus tétel lehetővé teszi, hogy valós függvénytani függetlenségeket igazoljunk. Illusztrációként tekintsük a következő problémát. A Baire-féle kategóriatételnek egy egyszerű következménye, hogy $\mathbb{Q}$ nem G_δ halmaz, azaz a racionális számok halmaza nem állítható elő megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként. Nyilván $\mathbb{Q} = \cap_{r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{r\})$, ahol a jobb oldalon kontinuum sok nyílt halmaz metszete áll. Hogy itt ténylegesen kell-e kontinuum, az független. Ugyanis tekintsük az ekvivalens problémát: hány zárt halmaz uniója $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ topologikus tér homeomorf $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-nel [L, 26. oldal]. Legyen f az az $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ függvény, amit az idézett bizonyítás konstruál. Az f függvény $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ értelmezési tartományát konzisztensen fel tudjuk bontani kontinuumnál kevesebb $X_i = \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n^i$ szorzat uniójára ($i \in I$, ahol $|I| <$kontinuum), ahol $|B_n^i| \leq n$. Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor minden $f(X_i)$ zárt, és $\cup_{i \in I} f(X_i) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. fejezet

Tiltott minták és teljes dimenziójú halmazok

Ebben a fejezetben célunk a következő lesz. Előre adott mintához keresünk olyan teljes Hausdorff-dimenziójú (a térrel egyező dimenziójú) halmazt, mely nem tartalmazza az adott mintát. Az alaptér mindvégig $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}^d$.

3.1. Tiltott minta: az összes parallelogramma

Az összes parallelogramma megtiltása nem annyira életidegen követelmény, amilyennek első látásra tűnhet. Természetes kérdés, hogy két nagy dimenziójú halmaz metszete szükségképpen nagy dimenziójú-e. A válasz persze nem, még két pozitív mértékű halmaz is lehet diszjunkt. De ha A és B pozitív Lebesgue-mértékű halmazok $\mathbb{R}^d$-ben, akkor alkalmas $t \in \mathbb{R}^d$-re $\lambda((A+t) \cap B) > 0$ (például A egy sűrűségi pontját B egy sűrűségi pontjára tolhatjuk t-vel). Igaz-e valami hasonló teljes dimenziójú halmazokra?

P. Mattila [Ma2] olyan $\mathbb{R}$-beli kompakt A, B halmazokat konstruált, melyek Hausdorff-dimenziója 1, és A minden eltoltja legfeljebb 1 pontban metszi B-t. Keleti T. [K1] olyan kompakt $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazt konstrált, melynek Hausdorff-dimenziója 1, és minden $t \neq 0$-ra $A \cap (A+t)$ legfeljebb 1 pontú. A következőkben az ő módszerét alkalmazva konstruálunk magasabb dimenzióban ilyen tulajdonságú halmazt.

3.1. Definíció. Az $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ rendezett négyes parallelogramma, ha az x_i-k között legalább 3 különböző van, és $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$.

Világos, hogy egy halmaz pontosan akkor metszi minden nemtriviális eltoltját legfeljebb 1 pontban, ha nem tartalmaz parallelogrammát.

A parallelogramma ezen definíciója egy másik lehetséges motivációval is kapcsolatba hozható. Ugyanis a parallelogramma-mentes halmazok egyúttal még háromtagú számtani sorozatot sem tartalmaznak, azaz olyan x_1, x_2, x_3 különböző elemekből álló hármast, melyekre $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$. A (háromtagú) számtani sorozatok garantálhatósága sokat kutatott kérdés a számelméletben is: a klasszikus eredmények mellett (Roth és Szemerédi tételei) ma is nagyon aktívan vizsgált terület.

Konstrukció.

$\mathbb{R}^d$-ben konstruálunk egy d Hausdorff-dimenziójú, kompakt, parallelogrammát nem tartalmazó halmazt.

Legyen $\delta_m = 1/(6^{m-1}m!)$. Rekurzívan definiáljuk az A_m kompakt halmazokat, melyek mindegyike páronként diszjunkt, zárt kockákból áll:

$$A_m = \prod_{j=1}^{d} \bigcup_{1 \le i_k \le k, 1 \le k \le m} [n^{(j)}_{i_1,\dots,i_m}\delta_m, (n^{(j)}_{i_1,\dots,i_m} + 1)\delta_m].$$

Így az A_m halmaz egy $(m!)^d$ kis kockából álló kompakt halmaz lesz. Az A_m kockáit jelöljük (valamilyen sorrendben) $I_1^m, \dots, I^m_{(m!)^d}$-mel, és legyen a $(J_1, J_2, \dots)$ sorozat az összes előforduló kocka felsorolása: $(I_1^1, \dots, I^{m-1}_{((m-1)!)^d}, I_1^m, \dots, I^m_{(m!)^d}, I_1^{m+1}, \dots)$.

Legyen $n_1^{(1)} = \dots = n_1^{(d)} = 0$. Ekkor $A_1 = [0, 1]^d$. Most megadjuk az $A_1, \dots, A_m$-ből A_{m+1}-et megadó rekurziót.

Ha $\prod_{j=1}^d n^{(j)}_{i_1,\dots,i_m}\delta_m \notin J_m$, akkor legyen minden $1 \le i \le m+1, 1 \le j \le d$-re

$$n^{(j)}_{i_1,\dots,i_m,i} = 6(m+1)n^{(j)}_{i_1,\dots,i_m} + 6i - 6,$$

azaz a J_m-től különböző kockák mindegyikét felosztjuk $(6(m+1))^d$ részre (koordinátánként $6(m+1)$-re), és megtartjuk azokat, amelyek minden koordinátában 6-tal osztható sorszámúak.

Ha $\prod_{j=1}^{d} n^{(j)}_{i_1,\dots,i_m}\delta_m \in J_m$, akkor legyen minden $1 \le i \le m+1, 1 \le j \le d$-re

$$n^{(j)}_{i_1,\dots,i_m,i} = 6(m+1)n^{(j)}_{i_1,\dots,i_m} + 6i - 3,$$

azaz a J_m kockát felosztjuk $(6(m+1))^d$ részre (koordinátánként $6(m+1)$-re), és megtartjuk azokat, amelyek minden koordinátában 3-mal osztható, de 6-tal nem osztható sorszámúak.

Legyen $A = \cap_{m=1}^{\infty} A_m$.

3.2. Tétel. *A konstruált A halmaz kompakt, és nem tartalmaz parallelogrammát.*

Bizonyítás. A kompaktság nyilvánvaló, mert $\mathbb{R}^d$-beli kompaktak metszete kompakt.

Tegyük fel, hogy valamely $x_1, x_2, x_3, x_4 \in A$ között van három különböző. 1) Először tegyük fel, hogy x_1 különbözik az összes többitől. Legyen m olyan, hogy csak x_1 van benne valamely $I_j^m = J_M$-ben (mivel $\lim_{M\to\infty} \operatorname{diam}(J_M) = 0$, ezért ilyen van). Ekkor A_{M+1} defininálása során x_2, x_3, x_4 „hatodik” kockában voltak, x_1 pedig „harmadiktól indulóan hatodik” kockában volt. Ekkor például ezen kis kockák és az x_i-k első koordinátájára koncentrálva azt kapjuk, hogy x_1 első koordinátája $(6N_1 + 3)\delta_M + \varepsilon_1$, x_j $(j = 2, 3, 4)$ első koordinátája pedig $6N_j\delta_M + \varepsilon_j$, ahol N_1, N_2, N_3, N_4 egészek, és $0 \le \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \le \delta_M$. Így $x_2 - x_1 \ne x_4 - x_3$. 2) Ha $x_1 = x_2$, akkor $x_3 \ne x_4$, ez az eset is kész. 3) Ugyanígy ha $x_1 = x_3$, akkor $x_2 \ne x_4$. 4) Ha pedig $x_1 = x_4$, akkor x_3 különbözik az összes többitől, és az előbb adott bizonyítás elmondható x_1 helyett x_3-mal. □

3.3. Tétel. *A konstruált A halmazra* $\dim_{\mathrm{H}}(A) = d$.

Bizonyítás. Használjuk a 2.2 tételt. Annak jelöléseivel most $E_{k-1} = A_k$, $m_k = k + 1$. Amikor a k. lépésben $6(k+1)$ darabra osztunk egy kockát, és abból megtartunk minden hatodikat (minden koordinátában), akkor a minimális előfoduló távolság alulról becsülhető az egy koordinátában előforduló minimális távolsággal, ami $\varepsilon_k =$

$\delta_k/(\frac{5}{6}(k+1))$. Ezt beírva a 2.2 tételbe, adódik a bizonyítandó állítás, ugyanis

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) \geq \liminf_{k\to\infty} d \cdot \frac{\log(k!)}{-\log\left(\frac{k+1}{\frac{5}{6}(k+1)} \cdot \frac{1}{6^{k-1}k!}\right)} = d,$$

valamint a $\dim_{\mathrm{H}}(A) \leq d$ nyilvánvaló. □

A síkon a konstruált A halmaznak van egy további érdekessége.

3.4. Tétel. *Ha $d = 2$, akkor az imént konstruált A halmaz nem tartalmaz derékszögű, egyenlő szárú háromszöget.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekte, hogy $x_1, x_2, x_3 \in A$ derékszögű, egyenlő szárú háromszög, melyben x_2-nél van a derékszög, és x_1 az x_3 x_2 körüli, $\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatottja. Legyen M olyan, hogy csak x_1 van benne valamely $I_j^m = J_M$-ben. Ekkor x_1 koordinátái: $(6N_1^x+3)\delta_M+\varepsilon_1^x, (6N_1^y+3)\delta_M+\varepsilon_1^y$, x_j $(j = 2, 3)$ koordinátái pedig $6N_j^x\delta_M + \varepsilon_j^x, 6N_j^y\delta_M + \varepsilon_j^y$, ahol $0 \leq \varepsilon_1^x, \varepsilon_1^y \varepsilon_j^x, \varepsilon_j^y \leq \delta_M$. Belátjuk, hogy derékszögű, egyenlő szárú háromszöggel ez nem fordulhat elő.

Nagyítás után feltehető, hogy $\delta_M = 1$, eltolás után pedig az is, hogy $N_2^x = N_2^y = 0$, vagyis a derékszögű x_2 csúcs $[0, 1] \times [0, 1]$-ben van. Alkalmazzunk még egy eltolást úgy, hogy x_2 az origóba kerüljön. Ezek után x_3 koordinátái: $6N_3^x + c_3^x, 6N_3^y + c_3^y$, ahol $-1 \leq c_3^x, c_3^y \leq 1$. Ekkor x_1 koordinátái egyrészt (x_3 origó körüli, $\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatottja): $-6N_3^y - c_3^y, 6N_3^x + c_3^x$, másrészt $(6N_1^x+3)+c_1^x, (6N_1^y+3)+c_1^y$, ahol $-1 \leq c_1^x, c_1^y \leq 1$. Ez nyilván ellentmondás. □

Van tehát a síkon olyan kompakt halmaz, amely teljes dimenziójú, de nem tartalmaz derékszögű, egyenlő szárú háromszöget. Van-e minden háromszöghöz olyan teljes dimenziójú kompakt halmaz a síkon, amely nem tartalmaz az adott háromszöghöz hasonlót? A következő pontban ezt a kérdést válaszoljuk meg.

3.2. Tiltott minta: egy előre adott háromszög

Hogy a felmerült kérdést meg tudjuk válaszolni, az $\mathbb{R}^2$ síkot a $\mathbb{C}$ számsíkkal azonosítjuk, kidolgozzuk [K2] komplex változatát (Keleti T. a számegyenesen bizonyított be analóg állítást), és így oldjuk meg a feladatot.

3.5. Lemma. *Legyen $\alpha \neq 0$ komplex szám, melyre $|\alpha| < \frac{1}{12}$. Ekkor van legalább $\frac{1}{18|\alpha|^2}$ darab olyan j Gauss-egész, melyek egy négyzetrácsban helyezkednek el, és amelyekre $\alpha j \in [0,1] \times [0,1]$.*

Bizonyítás. Ha α pozitív valós, akkor az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ középpontú, tengelypárhuzamos és $\frac{1}{3}$ oldalú négyzet legalább $(\frac{1}{3\alpha} - 1)^2 > \frac{1}{9\alpha^2} - \frac{2}{3\alpha} > \frac{1}{18\alpha^2}$ olyan pontot tartalmaz, melynek $1/\alpha$-szorosa Gauss-egész (és amely Gauss-egészek így szintén egy négyzetrácsban helyezkednek el). Ennek a négyzetnek minden elforgatottja is a $[0,1] \times [0,1]$-en belül van. □

3.6. Tétel. *Legyen $P = (p_1, p_2, p_3) \subseteq \mathbb{R}^2$ háromszög (azaz p_1, p_2, p_3 páronként különböznek). Ekkor létezik olyan $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt halmaz, melyre $\dim_{\mathrm{H}}(A) = 2$, és A nem tartalmaz P-hez irányítástartóan hasonló részhalmazt.*

Bizonyítás. Legyenek p_1, p_2, p_3 egyszerre komplex számok is, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Legyen M rögzített páros szám, majd később meghatározzuk, mekkora. Legyen $\alpha = \frac{p_3 - p_1}{p_2 - p_1} \in \mathbb{C}$, világos, hogy ekkor $\alpha \neq 0, 1$. Legyen $L > 0$ valós szám, majd ezt is később határozzuk meg. Legyen $\delta_k = \frac{1}{L^k m_1 \cdot \ldots \cdot m_k}$, ahol az m_j értékeket is később határozzuk meg.

Tervünk a következő. Indulunk a $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzetből, és minden lépésben van egy listánk az éppen meglevő négyzetekből adódó összes rendezett hármasból. Megyünk végig a listán, és amikor egy (S_1, S_2, S_3) hármashoz érünk a k. lépésben, akkor a benne levő négyzetek mindegyikében úgy veszünk fel m_k^2 darab kis tengelypárhuzamos négyzetet, melyek oldalhossza δ_k, hogy azok távolsága páronként legalább δ_k legyen, és ezek a kis négyzetek már „jók” abban az értelemben, hogy ha $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, s_3 \in S_3$, akkor $s_1 s_2 s_3$ irányítástartóan nem hasonló P-hez. A többi négyzet mindegyikében is felveszünk m_k^2 darab ugyanekkora tengelypárhuzamos négyzetet, de ezekben csak a legalább δ_k-s távolságra kell ügyelnünk. Ezután a kis négyzetekből adódó összes rendezett hármast a lista végére írjuk valamilyen sorrendben. Ha itt most az m_k sorozat olyan, hogy

$$\lim_{k \to \infty} \frac{2 \log(m_1 \cdot \ldots \cdot m_{k-1})}{-\log(m_k \delta_k)} = 2,$$

akkor 2.2 tétel szerint a metszetként adódó A halmazra $\dim_{\mathrm{H}}(A) = 2$. Ilyen célnak megfelel például az $m_k = \max(k, 3)$ választás.

Legyenek tehát X, Y, Z négyzetek, melyekben minden kis négyzet δ_{k-1} oldalú, és úgy akarunk javítani, hogy $x \in X, y \in Y, z \in Z$ esetén $\frac{y-z}{x-z} \neq \alpha$ legyen.

Először javítsunk Y minden kis négyzetében. Minden kis négyzetben vegyük fel a következő kis négyzeteket: $\delta_k(M\alpha j_y + [0,1] \times [0,1])$, ahol j_y Gauss-egész. Ezek a kis négyzetek nem lógnak egymásba, sőt távolságuk is nagyobb δ_k-nál, ha $M|\alpha| > 2\sqrt{2} + 1$, azaz $M > M_y$. Hány ilyen j_y van? A $\delta_k M\alpha j_y$ alakú pontokból a δ_{k-1} oldalú négyzetbe a lemma szerint legalább $1/18(M|\alpha|\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}})^2 > 18m_k^2$ esik, ha $L > L_y$ (és ebbe az $L > L_y$ feltételbe azt is beleértjük, hogy a 3.5 lemma alkalmazható legyen, ilyen módon az L-re adódó alsó korlát függ M-től). Ezen $18m_k^2$ rácspont közül a nem a kerületen levők fölé fel lehet venni a $\delta_k([0,1] \times [0,1])$-es négyzetet (mivel a kerülettől vett távolság legalább akkora, mint a többi rácsponttól vett távolság minimuma), ami legalább m_k^2 darab, mivel $m_k \geq 3$.

Most javítsunk X minden kis négyzetében. Minden kis négyzetben vegyük fel a következő kis négyzeteket: $\delta_k(Mj_x + [0,1] \times [0,1])$, ahol j_x Gauss-egész. Akárcsak az előbb, adódik, hogy fel tudunk venni m_k^2 darab kis négyzetet, ha $M > M_x, L > L_x$.

Végül javítsunk Z minden kis négyzetében. Minden kis négyzetben vegyük fel a következő kis négyzeteket: $\delta_k(M\frac{\alpha}{\alpha-1}j_z + \frac{M}{2}\frac{\alpha}{\alpha-1} + [0,1] \times [0,1])$, ahol j_z Gauss-egész. Ezúttal is fel tudunk venni m_k^2 darabot, ha $M > M_z, L > L_z$.

Legyen tehát $M > M_x, M_y, M_z$, $L > L_x, L_y, L_z$, ezek a számok csak α-tól függenek. Legyen továbbá még M olyan nagy, hogy $M|\alpha|/2 > 4|\alpha| + 4$ is fennálljon (emiatt esetleg L-et még nagyobbnak kell választani).

Ezt a javítást végezzük el minden lépésben, állítjuk, hogy a metszet nem tartalmazza a tiltott mintát. Tegyük fel indirekte, hogy végül valamely x, y, z-re $\frac{y-z}{x-z} = \alpha$, azaz $y = \alpha x - (\alpha - 1)z$ a metszetben. Válasszunk olyan kicsi δ_k-t, hogy x, y, z páronként különböző δ_k oldalú négyzetekbe essenek. Legyenek ezek a négyzetek X, Y, Z. Nézzük meg, mit kapunk, amikor az (X, Y, Z) hármas szerint javítottunk (a javításnál használt $\delta_K \leq \delta_k$). Ekkor az egyenlet x, y, z-re a következő. Valamely $0 \leq \varepsilon_x^1, \varepsilon_x^2, \varepsilon_y^1, \varepsilon_y^2, \varepsilon_z^1, \varepsilon_z^2 \leq 1$-re:

$$M\alpha j_y + (\varepsilon_y^1, \varepsilon_y^2) = \alpha(M j_x + (\varepsilon_x^1, \varepsilon_x^2)) - (\alpha - 1)\left(M\frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(j_z + \frac{1}{2}\right) + (\varepsilon_z^1, \varepsilon_z^2)\right),$$

azaz

$$M\alpha(j_y - j_x + j_z) + \frac{M\alpha}{2} = \alpha(\varepsilon_x^1, \varepsilon_x^2) - (\alpha - 1)(\varepsilon_z^1, \varepsilon_z^2) - (\varepsilon_y^1, \varepsilon_y^2).$$

Itt a bal oldal abszolút értéke legalább $M|\alpha|/2$, a jobb oldalé legfeljebb $4|\alpha| + 4$, ami ellentmondás. □

Nyilvánvaló igényünk az „irányítástartóan" szó elhagyása, de ez könnyen megtehető.

3.7. Következmény. *Legyen* $P = (p_1, p_2, p_3) \subseteq \mathbb{R}^2$ *háromszög. Ekkor létezik olyan* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *kompakt halmaz, melyre* $\dim_{\mathrm{H}}(A) = 2$, *és* A *nem tartalmaz* P*-hez hasonló részhalmazt.*

Bizonyítás. Minden (X, Y, Z) hármas javításánál először hajtsuk végre a javítási lépést α-val, majd $\overline{\alpha}$-tal. □

3.3. „Sok" tiltott minta

Valójában az előző részben látott módon megszámlálható sok tiltott mintához is tudunk maximális dimenziójú halmazt készíteni, mind $\mathbb{R}$-ben, mind $\mathbb{R}^2$-ben. Ebben a részben azt mutatjuk meg, hogy „nagyon sok" mintát már nem lehet megtiltani. Hogy legyen értelme annak, hogy nagyon sok minta, a hárompontú mintákat elhelyezzük egy térben.

3.8. Definíció (a minták tere). Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$) kompakt. Legyen

$$\mathcal{T}(A) = \bigcup_{x,y,z \in A; x \neq y} \frac{z - x}{y - x}.$$

3.9. Tétel. *Ha az* $A \subseteq \mathbb{R}$ *kompaktra* $\dim_{\mathrm{H}}(A) = 1$, *akkor* $\mathcal{T}(A)$ *sűrű* $\mathbb{R}$*-en.*

A tétel nyilvánvalóan következik a következő, kvantitatív változatából. Emlékezzünk vissza arra, hogy ha $0 < x, y < 1$, akkor $h(x, y) = s$ definíció szerint azt jelenti, hogy $x^s + y^s = 1$.

3.10. Tétel. *Legyen* $0 < a < b < 1$, *és tegyük fel, hogy az* $A \subseteq \mathbb{R}$ *kompakt halmazra* $\mathcal{T}(A) \cap (a, b) = \emptyset$. *Ekkor*

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) \le h(a, 1-b) < 1.$$

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, melyre $\mathcal{T}(A) \cap (a, b) = \emptyset$. Feltehető, hogy $\min(A) = 0$, $\max(A) = 1$ (mind a Hausdorff-dimenzió, mind a tartalmazott minták tere érzéketlen a nagyításokra és az eltolásokra).

Először belátjuk, hogy $h(a, 1-b) < 1$. Ugyanis $a^1 + (1-b)^1 = a - b + 1 < 1$, mivel $a < b$, továbbá $a^0 + (1-b)^0 = 2$. Így azon s, melyre $a^s + (1-b)^s = 1$, szigorúan 0 és 1 között van.

Legyen $s = h(a, 1-b)$. Legyen $\delta > 0$ adott. Meg fogjuk adni A-nak egy olyan, $I_1, \ldots, I_m$ zárt intervallumokból álló fedését, melyben minden intervallum hossza legfeljebb δ, és $\sum_{i=1}^m \lambda(I_i)^s \le 1$. A 0. szinten legyen A fedése a $[0, 1]$ szakasz. Az 1. szinten legyen A fedése $[0, a] \cup [b, 1]$. A 2. szinthez a következőképp készítjük el a fedést: a $[0, a]$ intervallumot összehúzzuk a $[0, a']$-re, ahol $a' = \max(A \cap [0, a]) \le a$. Ezután a $[0, a']$-t befedjük a $[0, aa'] \cup [(1-b)a']$-vel. Ugyanígy elkészítjük $A \cap [(1-b), 1]$ fedését. Az előforduló fedőszakaszok hossza legfeljebb $a^2, a(1-b), (1-b)a, (1-b)^2$. Minden lépésben ezt folytatjuk: az S fedőszakaszt az $A \cap S$ alsó (m) és felső (M) végpontjára húzzuk, majd a középső $(a(M-m)+m, (1-b)(M-m)+m)$ nyílt szakaszt elhagyjuk. Menjünk el azon k. szintig, ahol már $a^k, (1-b)^k \le \delta$ (ekkor minden a-kból és $(1-b)$-kből álló k hosszú szorzat is legfeljebb δ). Ezen a szinten a fedőszakaszok átmérője legfeljebb δ, és a hosszok s. hatványának összege legfeljebb

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (a^l (1-b)^{k-l})^s = (a^s + (1-b)^s)^k = 1.$$

Ezzel igazoltuk a tételt. □

Következő célunk ezen tétel egy gyengített megfordítása.

3.11. Tétel. *Legyen* $0 < a < b < 1$. *Ekkor van olyan* $A \subseteq \mathbb{R}$ *kompakt halmaz, melyre* $\mathcal{T}(A) \cap (a,b) = \emptyset$, *és*

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) = h\left(\frac{ab}{1-a+ab}, 1 - \frac{b}{1-a+ab}\right).$$

Bizonyítás. Készítsük el az $f_1(x) = a'x$, $f_2(x) = (1-b')x + (1-b')$ hasonlóságokhoz tartozó önhasonló A halmazt, ahol $0 < a' < b' < 1$ később meghatározandó számok. Ez a halmaz úgy készíthető el, hogy a $[0,1]$ szakaszból indulunk, és minden lépésben minden meglevő szakasznak elhagyjuk egy nyílt intervallumát: $[t, t+t_1]$ esetében $(t + t_1 a', t + t_1 b')$-t. Ekkor Hutchinson tételének értelmében $\dim_{\mathrm{H}}(A) = h(a', 1-b')$.

Úgy szeretnénk a'-t és b'-t megválasztani, hogy amikor az I intervallumnak elhagyjuk egy nyílt intervallumát, és I_1, I_2-vel jelöljük a megmaradó intervallumokat ($I_1 < I_2$), akkor $x \in I_1$, $z \in I_2$, $y \in I_1 \cup I_2$ esetén $\frac{y-x}{z-x} \notin (a,b)$. Ha most elkészítjük azt az önhasonló A halmazt, amit úgy kapunk, hogy minden lépésben a meglevő intervallumok középső $(a', 1-b')$ részét elhegyjuk, akkor $\mathcal{T}(A) \cap (a,b) = \emptyset$: legyen ugyanis $x < y < z \in A$. Nézzük az utolsó szintet, amikor x, y, z még egy intervallumon belül vannak, és hagyjuk el a középső $(a', 1-b')$ részét. Itt x és z különböző intervallumokba kerülnek, és $\frac{y-x}{z-x} \leq a$ vagy $\frac{y-x}{z-x} \geq b$ attól függően, hogy hová kerül y. A szükséges a', b' értékeket az önhasonlóság miatt elegendő $I = [0,1]$-re kiszámolni.

Legyen $b'a = a'$, valamint $b' - a' = (1-a')b$. Ebben az esetben ha $x \in [0, a']$, $z \in [b', 1]$, akkor $y \in [0, a']$ esetén $\frac{y-x}{z-x} \leq a$, míg $y \in [b', 1]$ esetén $\frac{y-x}{z-x} \geq b$. A kapott egyenletrendszer megoldása: $a' = \frac{ab}{1-a+ab}$, $b' = \frac{b}{1-a+ab}$. $\square$

Egyszerű számolás mutatja, hogy $0 < a' < a < b < b' < 1$, amiből világos, hogy $h(a', 1-b') < h(a, 1-b)$. Mennyire van messze egymástól a két becslés? Számoljuk ezt ki a szimmetrikus esetben, vagyis amikor $0 < a < \frac{1}{2}$, és $b = 1-a$, amikoris $h(a,a) = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log a}$. Ebben az esetben $a' = \frac{a}{1+a}$, $b' = \frac{1}{1+a}$. Ekkor

$$1 < \frac{h(a,a)}{h(a',a')} = \frac{\log a - \log(1+a)}{\log a} = 1 - \frac{\log(1+a)}{\log a} < \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585.$$

3.12. Következmény. *Ha* $s < \frac{\log 2}{\log 3}$, *akkor van olyan* $A \subseteq \mathbb{R}$ *kompakt halmaz, melyre* $\dim_{\mathrm{H}}(A) \geq s$, *és* $\mathcal{T}(A)$ *nem sűrű* $\mathbb{R}$*-en.*

Bizonyítás. Legyen $s < \frac{\log 2}{\log 3}$ adott, $\varepsilon > 0$ később megválasztandó. Azt fogjuk elérni, hogy $\dim_{\mathrm{H}}(A) \geq s$ legyen, és $\mathcal{T}(A) \cap \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right) = \emptyset$ fennálljon. Legyen $a = \frac{1}{2} - \varepsilon$, $b = \frac{1}{2} + \varepsilon$. Ekkor a korábbi jelöléssel $a' = \frac{\frac{1}{2}-\varepsilon}{\frac{3}{2}-\varepsilon}$, $b' = \frac{1}{\frac{3}{2}-\varepsilon}$. Ekkor mivel

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} h\left(\frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{\frac{3}{2} - \varepsilon}, \frac{1}{\frac{3}{2} - \varepsilon}\right) = \frac{\log 2}{\log 3},$$

ezért alkalmas $\varepsilon > 0$-ra az $f_1(x) = a'x$, $f_2(x) = (1 - b')x + (1 - b')$ kontrakciók által meghatározott önhasonló halmaz minden feltételt kielégít. □

3.13. Tétel. *Legyen* $A \subseteq \mathbb{R}$ *kompakt. Ekkor* $\dim_{\mathrm{H}}(\mathcal{T}(A)) \leq \dim_{\mathrm{H}}(A) + 2\dim_{\mathrm{P}}(A)$.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $A \subseteq I = [0, 1]$. Rögzített $\varepsilon > 0$-ra legyen

$$A_\varepsilon = A^3 \setminus \{(x, y, z) \mid |x - y| < \varepsilon\} \subseteq I^3,$$

$$I_\varepsilon = I^3 \setminus \{(x, y, z) \mid |x - y| < \varepsilon\} \subseteq I^3.$$

Legyen $f_\varepsilon : I_\varepsilon \to \mathbb{R}$ a következő: $(x, y, z) \mapsto \frac{z-x}{y-x}$. Ez a függvény folytonosan differenciálható a kompakt I_ε halmazon, így Lipschitz-tulajdonságú I_ε mindkét útösszefüggőségi komponensén. Ekkor $\dim_{\mathrm{H}}(f_\varepsilon(A_\varepsilon)) \leq \dim_{\mathrm{H}}(A^3)$. Mivel

$$\mathcal{T}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_{\frac{1}{n}}(A_{\frac{1}{n}}),$$

ezért $\dim_{\mathrm{H}}(\mathcal{T}(A)) \leq \dim_{\mathrm{H}}(A^3)$. Kétszer felhasználva, hogy kompakt A, B halmazokra $\dim_{\mathrm{H}}(A \times B) \leq \dim_{\mathrm{H}}(A) + \dim_{\mathrm{P}}(B)$ [Ma1, 115. oldal], adódik a bizonyítandó állítás. □

3.14. Következmény. *Ha az* $A \subseteq \mathbb{R}$ *kompaktra* $\dim_{\mathrm{H}}(A) + 2\dim_{\mathrm{P}}(A) < 1$, *akkor* $\mathcal{T}(A) \neq \mathbb{R}$. □

A következő lépésben megvizsgáljuk, hogy mi igaz $A \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ halmazokra. Ehhez felhasználjuk a következő tételt [Ma1, 144. oldal], [Ma3]:

3.15. Tétel. *Ha $m < s < n$, és $A \subseteq \mathbb{R}^n$ μ^s-mérhető, továbbá $\mu^s(A) < \infty$, akkor*

$$\dim_{\mathrm{H}}(A \cap (W + x)) = s - m$$

$\mu^s \times \gamma_{n,n-m}$-majdnem-minden $(x, W) \in A \times G(n, n-m)$-re. (Ahol $G(n, n-m)$ az $\mathbb{R}^n$ tér $n-m$ dimenziós altereinek Grassmann-sokasága, $\gamma_{n,n-m}$ pedig egy valószínűségi mérték ezen, mely az ortogonális transzformációkra nézve invariáns.)

Megjegyezzük, hogy a hivatkozott tétel ennél többet mond ki. Nekünk azonban csak ennyire van szükségünk, illetve ennek egy következményére.

3.16. Következmény. *Ha $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $\mu^s(A) > 0$, akkor van olyan $(x, W) \in A \times G(n, n - m)$, melyre*

$$\dim_{\mathrm{H}}(A \cap (W + x)) = s - m.$$

Bizonyítás. Ha $\mu^s(A) < \infty$, akkor a 3.15 tétel közvetlenül adja a bizonyítandó állítást. Ha $\mu^s(A) = \infty$, akkor [Ma1, 121. oldal] szerint van olyan $A' \subseteq A$ kompakt, melyre $0 < \mu^s(A') < \infty$. Ekkor A'-re felírva a 3.15 tételt, adódik a bizonyítandó állítás. □

Ennek segítségével most bebizonyítjuk a következő tételt, mely azt mutatja, hogy minden elegendően nagy dimenziós kompakt halmazban előforduló valós minták sűrű halmazt alkotnak $\mathbb{R}$-en. Precízen:

3.17. Tétel. *Ha az $A \subseteq \mathbb{C}$ kompaktra $\dim_{\mathrm{H}}(A) = 2$, akkor $\mathcal{T}(A) \cap \mathbb{R}$ sűrű $\mathbb{R}$-en.*

Ehelyett a következő kvantitatív alakot bizonyítjuk be:

3.18. Tétel. *Legyen $0 < a < b < 1$, és tegyük fel, hogy az $A \subseteq \mathbb{C}$ kompakt halmazra $\mathcal{T}(A) \cap (a, b) = \emptyset$. Ekkor*

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) \leq 1 + h(a, 1 - b) < 2.$$

Bizonyítás. Az $1+h(a, 1-b) < 2$ rész nyilvánvaló (és már láttuk is a valós esetben).

Tegyük fel, hogy $\dim_{\mathrm{H}}(A) > 1 + h(a, 1 - b)$. Legyen s olyan, hogy $\dim_{\mathrm{H}}(A) > s > 1 + h(a, 1 - b)$. Ekkor $\mu^s(A) > 0$. Használjuk a 3.16 következményt: alkalmas

$A \times G_{2,1}$-beli (x, L) elemre, azaz valamely $x \in A$-ra és L, origón átmenő egyenesre, $\dim_{\mathrm{H}}(A \cap (L + x)) = s - 1 > h(a, 1 - b)$. Ekkor a 3.10 tétel szerint alkalmas $x, y, z \in L \cap A$ elemekre $\frac{z-x}{y-x} \in (a, b)$. $\square$

Fennáll a 3.13 tétel és 3.14 következmény komplex változata, bizonyításuk ugyanaz, mint a valós esetben:

3.19. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Ekkor* $\dim_{\mathrm{H}}(\mathcal{T}(A)) \le \dim_{\mathrm{H}}(A) + 2\dim_{\mathrm{P}}(A)$. $\square$

3.20. Következmény. *Ha az $A \subseteq \mathbb{C}$ kompaktra* $\dim_{\mathrm{H}}(A) + 2\dim_{\mathrm{P}}(A) < 2$*, akkor* $\mathcal{T}(A) \neq \mathbb{C}$. $\square$

4. fejezet

A tér fedése

Most azt a kérdést szeretnénk megvizsgálni, hogy egy mérték-, illetve dimenzióelméleti szempontból kis halmaznak hány eltoltjával lehet lefedni a teret. Az A halmaz t-vel vett eltoltja az $A + t = \{a + t \mid a \in A\}$ halmaz, nemkommutatív csoport hatása esetén is a jobb-eltolásokat tekintve.

4.1. Definíció. Legyen A egy X lengyel csoport (speciálisan $\mathbb{R}, \mathbb{R}^d$ vagy provéges csoport) Borel-részhalmaza.
1) A fedésben kicsi, ha csak kontinuum sok eltoltja fedi X-et;
2) A fedésben nagy, ha megszámlálható sok eltoltja fedi X-et;
3) A fedésben független, ha konzisztens a halmazelmélet ZFC-axiómarendszerével, hogy kontinuumnál kevesebb eltoltja fedi X-et.

Nullmértékű halmazok fedésben nem nagyok. Hasonlóképp a Baire-féle kategóriatétel értelmében az 1. kategóriájú halmazok sem nagyok fedésben. Ismeretes, hogy ha X lengyel csoport, akkor van olyan $X = A \cup (X \setminus A)$ felbontás, hogy A nullmértékű, a komplementere pedig 1. kategóriájú (még olyan A is van ezzel a tulajdonsággal, ami G_δ, azaz megszámlálható sok nyílt halmaz metszete), azaz a felbontás mindkét tagja fedésben nem nagy, de az uniójuk az.

A valós számegyenesen egy nullmértékű halmaz lehet fedésben független Elekes M. és J. Steprans [ES] tétele szerint. Elekes M. és Tóth Á. [ET] ezt bebizonyították minden kommutatív lengyel csoportra, a nemkommutatív esetet pedig

Lie-csoportok és provéges csoportok vizsgálatára vezették vissza, és Lie-csoportok esetében meg is oldották a problémát. Provéges csoportokra pedig Abért M. [A] bizonyította az állítást, amivel a tétel minden lengyel csoportra vonatkozóan igazolást nyert.

A következőkben megvizsgáljuk, hogy box- és Hausdorff-dimenzióban nem teljes dimenziójú halmazok fedésben mennyire nem nagyok (az előbbivel megválaszoljuk Abért M. [A] kérdését). Az alaptér minden esetben legyen egy provéges csoport.

4.2. Definíció (provéges csoport)**.** Legyenek adottak a $G_1, G_2, \ldots$ véges csoportok, valamint a $\varphi_k : G_{k+1} \to G_k$ szürjektív homomorfizmusok. Ekkor az ezek által meghatározott G provéges csoport elemei a következők:

$$\{(g_1, g_2, \ldots) \mid \forall k \in \mathbb{N} : g_k \in G_k, \varphi_k(g_{k+1}) = g_k\},$$

a műveletet pedig koordinátánként végezzük

4.3. Definíció (metrika)**.** Ha $x \neq y$, akkor legyen $d(x,y) = \frac{1}{|G_k|}$, ha $x_{|j} = y_{|j}$ minden $j < k$-ra, és $x_{|k} \neq y_{|k}$. Ha $x = y$, akkor $d(x,y) = 0$. (Ahol $(\cdot)$ elem vagy részhalmaz n. komponensre vett vetületét jelöljük $(\cdot)_{|n}$-nel.)

4.4. Definíció (mérték)**.** A bázis-nyílt halmazok mértékét a következőképpen definiáljuk. Ha $A_{x_1,\ldots,x_n} = \{(g_1, g_2, \ldots) \in G \mid g_1 = x_1, \ldots, g_n = x_n\}$ nemüres, akkor legyen $\mu(A_{x_1,\ldots,x_n}) = \frac{1}{|G_n|}$.

4.5. Megjegyzés. 1. A provéges csoport a $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$ teljes direkt szorzat részcsoportja.
2. Ekvivalens definíció: provéges csoportnak nevezzük a kompakt, Hausdorff, teljesen széteső topologikus csoportokat.
3. A megadott csoportsorozatot, illetve az összekötő homomorfizmusokat összességében véges csoportok inverz rendszerének nevezzük, a provéges csoport ennek inverz limesze.
4. A definiált d valóban metrika, μ pedig valóban mérték, ez a G csoporthoz tartozó Haar-mérték, melyet $\mu(G) = 1$-re normáltunk.

5. A megadott struktúra topologikus csoport (szorzása és inverzképzése folytonos műveletek), ráadásul lengyel tér is (teljes és szeparábilis).

A továbbiakban legyen minden provéges csoport végtelen, azaz a definiáló $(G_1, G_2, \ldots)$ sorozatban legyen $|G_n| \to \infty$, amint $n \to \infty$.

4.1. Box-dimenzió

Mi igaz $\mathbb{R}$-en? U. B. Darji és Keleti T. bizonyították [DK], hogy ha egy valós kompakt halmaz box-dimenziója 1-nél kisebb, akkor fedésben kicsi. Pontosan ez az állítás igaz provéges csoportokra is, bizonyításunk során az ő technikájukat fogjuk a mi esetünkre átdolgozni.

Legyen G tetszőleges provéges csoport, mely a $(G_1, G_2, \ldots)$ csoportsorozat (a közöttük futó homomorfizmusokat beleértve) inverz limesze. Nevezzük ritkításnak azt, amikor kiválasztunk egy $(G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots)$ végtelen részsorozatot (a homomorfizmusokat a kézenfekvő kompozíciókkal értelmezve), ennek inverz limesze a $\widetilde{G}$ csoport. Ez a csoport — szintén a kézenfekvő bijekció segítségével — izomorf és homeomorf G-vel. Ez a ritkítási művelet nagy hasznunkra lesz.

Megadjuk a box-dimenziónak azt a definícióját, mely a provéges csoportok esetében sokkal használhatóbb az általánosnál.

4.6. Definíció. Legyen $X \subseteq G$ tetszőleges. Ekkor legyenek

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) = \liminf_{k \to \infty} \frac{\log |X_{|k}|}{\log |G_{|k}|}; \quad \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) = \limsup_{k \to \infty} \frac{\log |X_{|k}|}{\log |G_{|k}|}$$

rendre X alsó és felső box-dimenziója. Ha $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) = \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X)$, akkor azt mondjuk, hogy $\dim_{\mathrm{B}}(X)$ létezik, és értéke $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) = \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X)$.

Ha adott a G provéges csoport, akkor elkészíthetjük G^n direkt hatványát. Ennek részhalmazain hasonlóképpen értelmezhetjük az előbb definiált két fogalmat. A távolság legyen a koordinátánként vett távolságok maximuma. A dimenziók definíciójában azonban továbbra is $\log |G_{|k}|$ álljon a nevezőben. Ekkor például $\dim_{\mathrm{B}}(G^n) = n$.

Legyen $X, Y \subseteq G$. Könnyű belátni, hogy ekkor $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X)+\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(Y) \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X\times Y)$, $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X)+\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(Y) \geq \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X\times Y)$, azaz ha $\dim_{\mathrm{B}}(X), \dim_{\mathrm{B}}(Y)$ léteznek, akkor $\dim_{\mathrm{B}}(X) + \dim_{\mathrm{B}}(Y) = \dim_{\mathrm{B}}(X \times Y)$.

4.7. Lemma. *Ha $X \subseteq G$ belseje nemüres, akkor* $\dim_{\mathrm{B}}(X) = 1$. *Ha $X \subseteq G^n$ belseje nemüres, akkor* $\dim_{\mathrm{B}}(X) = n$.

Bizonyítás. Nyilván elegendő az egydimenziós változatot belátni. Legyen $x = (x_1, x_2, \ldots)$ belső pontja X-nek. Ekkor alkalmas k-ra $(x_1, \ldots, x_k, g_{k+1}, g_{k+2} \ldots) \in X$ minden $g_{k+1} \in G_{k+1}, g_{k+2} \in G_{k+2}, \ldots$ esetén. Ekkor minden $l \geq k$-ra $|X_{|l}| \geq \frac{|G_{|l}|}{|G_{|k}|}$. Mivel $|G_{|l}| \to \infty$, így $\frac{\log |X_{|l}|}{\log |G_{|l}|} \to 1$. □

Ha $X \subseteq G$, akkor legyen

$$X_*^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}.$$

Legyen $F_n : G^{n+1} \to G^n$ a következő:

$$F_n(x_1, \ldots, x_n, g) = (x_1 g, \ldots, x_n g).$$

Könnyű belátni, hogy $d(F_n(x), F_n(y)) \leq d(x, y)$, így F folytonos. Szintén könnyen adódik, hogy nem növeli sem az alsó, sem a felső dimenziót, ugyanis semely szinten nem növeli az elemszámot: $|X_{|k}| \geq |F(X)_{|k}|$.

4.8. Lemma. *Legyen $X \subseteq G$ tetszőleges, melyre $F_n(X^n \times G) \cap P_*^n = \emptyset$. Ekkor minden $g \in G$-re $Xg \cap P$ legfeljebb $(n-1)$ elemű. Ha továbbá P kontinuum számosságú, akkor X fedésben kicsi.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az első állítás nem igaz, azaz $x_1 g = y_1, \ldots, x_n g = y_n$ P különböző elemei, ahol $x_1, \ldots, x_n \in X$. Ekkor $F_n(x_1, \ldots, x_n, g) \in P_*^n$, ami ellentmondás. A második állítás nyilvánvaló az elsőből. □

4.9. Lemma. *Legyen $F \subseteq G^n$ kompakt, sehol sem sűrű. Ekkor van olyan $P \subseteq G$ kontinuum számosságú perfekt halmaz, melyre $F \cap P_*^n = \emptyset$.*

Bizonyítás. Legyen $U_0 = G$, ez nyílt. Általában az U_k halmaz álljon n^k nyílt komponensből. Az egyes szint komponenseiből úgy kapunk egy újabb szintet, hogy U_k minden komponensében n nyílt komponenst veszünk fel úgy, hogy minden komponens átmérője legfeljebb $\frac{1}{2^k}$, és lezártjuk is U_k-beli. Továbbá ha $V_1, \dots, V_{n^{k+1}}$ ezek a komponensek, akkor ha $x_1, \dots, x_n$ különböző V_j-kből vannak, akkor $(x_1, \dots, x_n) \notin F$.

Először vegyük fel $V_1, \dots, V_{n^{k+1}}$-et úgy, hogy páronként diszjunktak legyenek, az átmérőjük legyen legfeljebb $\frac{1}{2^k}$, még a lezártjuk is U_k-beli, valamint U_k minden komponensébe pontosan n essen közülük. Ezután zsugorítsuk őket, legyen π az $\{1, \dots, n^{k+1}\}$ halmaz egy n elemű variációja, azaz egy $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n^{k+1}\}$ injektív függvény, és legyenek $V_1' \subseteq V_1, \dots, V_{n^{k+1}}' \subseteq V_{n^{k+1}}$ olyanok, hogy $V_{\pi(1)}' \times \dots \times V_{\pi(n)}' \cap F = \emptyset$ (ilyen van, mert F nem sűrű $V_{\pi(1)} \times \dots \times V_{\pi(n)}$-ben). Ismételjük el ezt minden π variációra, megfelelő nyílt részét kapjuk U_k-nak, legyen ez U_{k+1}. Ez legyen a rekurziós lépés, és legyen $P = \cap_{k=0}^{\infty} U_k$. Könnyen adódik, hogy P megfelelő. □

4.10. Lemma. *Legyen $X \subseteq G$ kompakt, melyre $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) < 1$. Ekkor X fedésben kicsi.*

Bizonyítás. Legyen $n \geq 2$ olyan, hogy $n\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) < n - 1$, ekkor $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X^n) \leq n\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) < n - 1$. Ekkor $X^n \times G \subseteq G^{n+1}$, és $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X^n \times G) < n$, azaz $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F_n(X^n \times G)) < n$. Így a 4.7 lemma szerint $F_n(X^n \times G) \subseteq G^n$ üres belsejű, kompakt halmaz, tehát sehol sem sűrű. Ekkor a 4.9 lemma szerint alkalmas $P \subseteq G$ kontinuum számosságú perfekt halmazra $F_n(X^n \times G) \cap P_*^n = \emptyset$. Így a 4.8 lemma szerint készen vagyunk. □

Ezt az állítást egy alkalmas csoportsorozatra való áttéréssel fel tudjuk úgy erősíteni, hogy alsó dimenzióra vonatkozzon:

4.11. Tétel. *Legyen $X \subseteq G$ kompakt, melyre $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) < 1$. Ekkor X fedésben kicsi, azaz G nem fedhető le kontinuumnál kevesebb eltoltjával.*

Bizonyítás. A G csoportot definiáló G_n csoportokból kiválasztva egy részsorozatot, az ezek közötti homomorfizmusokat pedig a ritkítás előtti homomorfizmusok kompozíciójaként értelmezve egy $\widetilde{G}$ csoportot kapunk, mely izomorf G-vel. Ekkor ha adott az X halmaz, melyre $\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) < 1$, akkor legyen $\widetilde{G}$ olyan, hogy az abban értelmezett box-dimenzióra $\widetilde{\underline{\dim}_{\mathrm{B}}}(\widetilde{X}) = \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(X) < 1$ fennálljon. Ekkor $\widetilde{X}$ kontinuumnál kevesebb eltoltja nem fedi $\widetilde{G}$-t, azaz X kontinuumnál kevesebb eltoltja nem fedi G-t. $\square$

4.2. Hausdorff-dimenzió

Bebizonyítjuk, hogy minden provéges csoportban van kompakt, 0 Hausdorff-dimenziójú, fedésben független részhalmaz. Az ötlet a 0 Hausdorff-dimenzió elérésére Máthé A.-tól származik [Má], aki $\mathbb{R}$-en bizonyította be az analóg állítást.

4.12. Tétel. *Ha G provéges csoport, akkor van 0 Hausdorff-dimenziójú, fedésben független, kompakt részhalmaza.*

Jelölés. Legyen $N_j \lhd G$ a következő normálosztó: azon elemek halmaza, melyeknek első j koordinátája 1 (egységelem).

4.13. Lemma. *Legyenek n, k pozitív egészek. Ekkor van olyan $K_{n,k} \subseteq G$ kompakt halmaz, mely zárt F_i halmazok uniója, $\sum_i \operatorname{diam}(F_i)^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{k}$, és tetszőleges $x_1, \dots, x_n \in G$ elemekre van olyan $g \in G$, melyre $x_1 g, \dots, x_n g \in K_{n,k}$. Továbbá $K_{n,k}$ még olyannak is választható, hogy valamely N_j normálosztó szerinti teljes mellékosztályok uniója legyen.*

Bizonyítás. Az állítás $n = 1$-re nyilvánvaló, legyen ugyanis $K_{1,k} = N_j$ egy kellően kicsi normálosztója G-nek. A továbbiakban rekurzióval készítjük el a megfelelő $K_{n,k}$ halmazokat.

Hogyan lép a rekurzió $n-1$-ről n-re? Egy rögzített k-hoz vegyük fel azt a rendszert, mely a feltételeket $n-1$-re kielégíti (legyen ez $K_{n-1,k}$), ehhez még teszünk részhalmazokat, így állítjuk elő $K_{n,k}$-t. Tegyük fel, hogy az $n-1$-re adott konstrukció olyan, hogy áll egy N_j normálosztóból, illetve néhány mellékosztályából, és hogy valamely F_i zártakra $K_{n-1,k} = \cup_i F_i$, valamint

$$\sum_i \operatorname{diam}(F_i)^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{k} - \varepsilon.$$

Minden N_j szerinti, N_j-től különböző mellékosztályban egy-egy elemet kijelölünk: $h_1, \dots, h_m$, majd köréjük azonos méretű $B_1, \dots, B_m$ zárt gömböket veszünk úgy, hogy fennálljon

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{diam}(B_i)^{\frac{1}{k}} < \varepsilon.$$

Továbbá $B_1, \dots, B_m$ úgy is megválaszthatók, hogy valamilyen $j' > j$-re $N_{j'}$ szerinti mellékosztályok legyenek. Ekkor $K_{n,k} = \cup_i B_i \cup K_{n-1,k}$ jó. Egyrészt

$$\sum_i \operatorname{diam}(F_i)^{\frac{1}{k}} + \sum_{i=1}^{m} \operatorname{diam}(B_i)^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{k}.$$

Másrészt legyenek $x_1, \dots, x_n$ tetszőleges elemek. Az $x_1, \dots, x_{n-1}$-hez adódik egy g, melyre $x_1 g, \dots, x_{n-1} g \in K_{n-1,k}$. Ekkor $x_n g$ valamely N_j szerinti mellékosztályban van, azaz alkalmas $g' \in N_j$-re $x_n g g' = h_i \in B_i$. Továbbá a g'-vel való jobb-szorzás az N_j szerinti mellékosztályok mindegyikét önmagára képezi, így gg' megfelelő elem: $x_1 gg', \dots, x_n gg' \in K_{n,k}$. Valamint $K_{n,k}$ újra olyan szerkezetű, amilyet a rekurzióban igértünk. □

4.14. Megjegyzés. A feltételeknek megfelelő $K_{n,k}$ halmazt el tudjuk készíteni egy tetszőleges N_j szerinti H mellékosztályon belül is úgy, hogy az olyan F_i zárt halmazokból áll, melyekre

$$\sum_i \operatorname{diam}(F_i)^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{k}$$

fennáll, és tetszőleges $x_1, \dots, x_n \in H$ elemekre legyen olyan $g \in N_j$, melyre $x_1 g, \dots, x_n g \in K_{n,k}$. A konstrukció ugyanúgy történik, mint a $H = G$ esetben, $K_{n,k}$ ekkor is egy normálosztó szerinti teljes mellékosztályok uniója. Közvetlen visszavezetés: készítsük el a teljes csoportban $K_{n,k}$-t, és minden N_j szerinti mellékosztályba eső részét toljuk jobb-eltolással H-ba: $H_1 h_1 = \dots = H_m h_m = H$. A kapott $K_{n,k}^H$ halmazra a $\sum \operatorname{diam}(.)^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{k}$ nyilván fennáll, és ha adottak $x_1, \dots, x_n \in H$, akkor alkalmas $g \in G$-re és H_i-re $x_1 g, \dots, x_n g \in K_{n,k} \cap H_i$. Ekkor $x_1 g h_i, \dots, x_n g h_i \in K_{n,k}^H \cap H$. Az, hogy ekkor $g h_i \in N_j$ fennáll, nyilvánvaló.

A szlalomok fedésére vonatkozó konzisztenciatételt fogjuk használni.

Tervünk a következő. Meghatározunk egy f-szlalomot, mely éppen G-nek felel meg, valamint egy $g(1), g(2), \dots$ részszlalom-méretet. Az előbb konstruált $K_{n,k}$

halmazok segítségével készítünk egy olyan 0 dimenziós C kompakt halmazt G-ben, amelyre igaz, hogy minden g-szlalomot C egy alkalmas jobb-eltoltjával fedhetünk. Ekkor G konzisztensen előáll, mint kontinuumnál kevesebb megengedett részszlalom uniója, amit be tudunk fedni C kontinuumnál kevesebb jobb-eltoltjával.

Konstrukció.

Vegyük fel a $\widetilde{K}_{1,1} = K_{1,1}$ halmazt a 4.13 lemma szerint, tegyük fel, hogy ez egyetlen N_j szerinti mellékosztályból áll.

Ezek után tegyük fel, hogy az m. szinten vagyunk, és az előző szinten kijelölt $\widetilde{K}_{(m-1)!,(m-1)!}$ halmaz néhány teljes, azonos méretű mellékosztályból áll. Legyen ezek közül az egyik H. Ekkor H alkalmas bal-eltoltjai $\widetilde{K}_{(m-1)!,(m-1)!}$ mellékosztályai, legyenek ezek $H = H_1, \ldots, H_{S(m-1)}$. Így alkalmas $1 = h_1, \ldots, h_{S(m-1)}$ elemekre $H = h_1 H_1 = \ldots = h_{S(m-1)} H_{S(m-1)}$. Ezután vegyük fel H-ban a 4.13 lemma utáni megjegyzés szerint létező $K^H_{m!,m!S(m-1)}$-t, majd ennek $S(m-1)$ darab h_i^{-1} visszatoltját, azaz a

$$h_i^{-1} K^H_{m!,m!S(m-1)} \subseteq H_i$$

halmazt $1 \leq i \leq S(m-1)$-re. Legyen

$$\widetilde{K}_{m!,m!} = \bigcup_{i=1}^{S(m-1)} h_i^{-1} K^H_{m!,m!S(m-1)}.$$

Ezt a rekurziós lépést ismételjük el minden m-re.

Ekkor $\widetilde{K}_{m!,m!}$ kompakt halmazok monoton fogyó sorozata, legyen

$$C = \cap_{m=1}^{\infty} \widetilde{K}_{m!,m!}.$$

4.15. Lemma. *A konstruált C halmazra* $\dim_{\mathrm{H}}(C) = 0$.

Bizonyítás. Mivel H-n belül $K^H_{m!,m!S(m-1)}$ egy zártakból álló F_i fedésére

$$\sum_i \operatorname{diam}(F_i)^{\frac{1}{m!S(m-1)}} < \frac{1}{m!S(m-1)},$$

így ennek $S(m-1)$ példányára ($h_1^{-1}, \ldots, h^{-1}_{S(m-1)}$ alkalmazása után):

$$\sum_i \operatorname{diam}(F_i)^{\frac{1}{m!S(m-1)}} < \frac{1}{m!}.$$

Ezután ha a kitevőt növeljük ($\mathrm{diam}(G) \leq 1$), akkor

$$\sum_i \mathrm{diam}(F_i)^{\frac{1}{m!}} < \frac{1}{m!},$$

ami bizonyítja a 0 dimenziót. □

A G-nek megfelelő szlalom meghatározása.

Most — akárcsak a box-dimenzióra vonatkozó tétel bizonyításában — tekintsük a a G-t meghatározó csoportsorozat egy részsorozatát úgy, hogy a $\widetilde{K}_{m!,m!}$-t alkotó mellékosztályok az (új) N_m normálosztóhoz tartozzanak. Az ezt kielégítő részsorozatot még sokféleképp kiválaszthatjuk, hiszen ha $\widetilde{K}_{m!,m!}$ teljes N_j szerinti mellékosztályok uniója, akkor teljes $N_{j'}$ szerinti mellékosztályok uniója is minden $j' > j$-re: ügyeljünk még arra is, hogy $|G_m/G_{m-1}| > m$ fennálljon (ahol G_0 alatt a triviális csoportot értjük). Innentől G-nek ebben abban az új előállításában dolgozunk, amit az N_m normálosztók határoznak meg, legyen $f(m) = |G_m/G_{m-1}|$. Legyen továbbá $g(m) = m$, és legyen az f-szlalom: $\prod_{m=1}^{\infty} G_m/G_{m-1}$. Ez valóban f-szlalom, és valóban a G csoportnak felel meg. Ugyanis képzeljük el G-t mint egy fát, mely az $(m-1)$.-ről az m. szintre lépve minden eleméből annyi részre ágazik, amekkora a $\varphi_{m-1} : G_m \to G_{m-1}$ homomorfizmus magja.

4.16. Lemma. *Tegyük fel, hogy adott a G-nek megfelelő szlalom egy g-részszlalomja, legyen ez Z. Ez $C = \cap_{m=1}^{\infty} \widetilde{K}_{m!,m!}$-ba tolható alkalmas jobb-eltolással.*

Bizonyítás. A bizonyítás során a konstrukció jelöléseit használjuk, melyekre röviden emlékeztetünk: $\widetilde{K}_{(m-1)!,(m-1)!}$ álljon a $H = H_1, \ldots, H_{S(m-1)}$ mellékosztályokból (a csoportok részsorozatára való áttérés után ezek N_{m-1} szerinti mellékosztályok), és legyenek $1 = h_1, \ldots, h_{S(m-1)}$ olyan elemek, melyekre $H = h_1 H_1 = \ldots = h_{S(m-1)} H_{S(m-1)}$.

Először azt mutatjuk meg teljes indukcióval, hogy minden m-re van olyan $y \in G$, amelyre $(Zy)_{|m} \subseteq (\widetilde{K}_{m!,m!})_{|m}$. Ez $m = 1$-re világos ($Z_{|1}$ egyelemű, $\widetilde{K}_{1!,1!}$ nemüres). Ha $m-1$-re igaz, akkor m-re a következőt tesszük. Tudjuk, hogy minden i-re $Z_{|i}$ legfeljebb $i!$ elemű. Az indukciós feltevés szerint $Z_{|m-1}$ $(\widetilde{K}_{(m-1)!,(m-1)!})_{|m-1}$-be tolható, legyen ez a jobb-eltolt $(Zx)_{|m-1}$, azaz $(Zx)_{|m-1} \subseteq$

$(H_1)_{|m-1} \cup \ldots \cup (H_{S(m-1)})_{|m-1}$. Mivel a $H_1, \ldots, H_{S(m-1)}$ mellékosztályok N_{m-1} szerintiek, ezért ha egy részhalmazt G_{m-1}-re megszorítva tartalmaznak, akkor G-ben is, így $(Zx)_{|m} \subseteq (H_1)_{|m} \cup \ldots \cup (H_{S(m-1)})_{|m}$. Minden $b \in Z$-re vegyük $(bx)_{|m} \in (Zx)_{|m}$ helyett a $H_{|m}$ mellékosztályba eső bal-eltoltját: ha valamelyik $(bx)_{|m}$ elem a $(H_i)_{|m}$ mellékosztályba esik, akkor helyette $(h_i bx)_{|m}$-et. Hány elemet kapunk így $H_{|m}$-ben? A $(bx)_{|m}$ alakú elemek száma legfeljebb $m!$, mivel Z g-szlalom. Ezen $(bx)_{|m}$ elemek mindegyikét eltoltuk valamelyik h_i-vel, így $H_{|m}$-ben összesen legfeljebb $m!$ darab $(h_i bx)_{|m}$ alakú elem keletkezett. Ezeket pedig $(K^H_{m!,m!S(m-1)})_{|m}$-be tudjuk tolni egy $h \in G$ elemmel: a $(h_i bx)_{|m}$ alakú elemek mindegyikét tetszőlegesen kifolytatva egy-egy G-beli elemmé azok egyszerre $K^H_{m!,m!S(m-1)}$-ba tolhatók annak definíciója szerint. Ekkor a $(h_i^{-1} K^H_{m!,m!S(m-1)})_{|m}$ alakú halmazokban is megfelelő helyre kerül $(Zx)_{|m}$ minden $(bx)_{|m}$ eleme: $(bxh)_{|m} = (h_i^{-1} h_i bxh)_{|m}$, itt $(h_i bxh)_{|m} \in (K^H_{m!,m!S(m-1)})_{|m}$, azaz

$$(bxh)_{|m} = (h_i^{-1} h_i bxh)_{|m} \in (h_i^{-1} K^H_{m!,m!S(m-1)})_{|m} \subseteq (\widetilde{K}_{m!,m!})_{|m}.$$

Tehát összességében xh olyan elem, amelyre $(bxh)_{|m} \in (\widetilde{K}_{m!,m!})_{|m}$ minden $b \in Z$-re.

Tekintsük minden m-re azt az $y_m \in G$ elemet, amelyre $(Zy_m)_{|m} \subseteq (\widetilde{K}_{m!,m!})_{|m}$. Ekkor G kompaktsága miatt (y_m)-nek van konvergens részsorozata, legyen ennek limesze $\overline{y}$. Állítjuk, hogy $Z\overline{y} \subseteq C$. Tegyük fel indirekte, hogy Z valamely b elemére $b\overline{y} \notin C$. Legyen $d'(b\overline{y}, C) = D > 0$, ahol d' a csoportok részsorozatára való áttérés után adódó metrika. Ha $m > m_0$, akkor $d'(by_m, b\overline{y}) < D/2$. Valamint ha $m > m_1$, akkor $\widetilde{K}_{m!,m!} \subseteq U_{D/2}(C)$, ahol $U_\varepsilon(C) = \{x \in G | d'(x, C) < \varepsilon\}$. Mivel $(by_m)_{|m} \in (\widetilde{K}_{m!,m!})_{|m}$, ezért $by_m \in \widetilde{K}_{m!,m!}$ (mivel $\widetilde{K}_{m!,m!}$ teljes N_m szerinti mellékosztályok uniója, ezért ha egy elemet G_m-re megszorítva tartalmaz, akkor G-ben is tartalmaz), így $d'(by_m, C) < D/2$. Ekkor $m > m_0, m_1$ esetén

$$d'(b\overline{y}, C) \leq d'(by_m, b\overline{y}) + d'(by_m, C) < D,$$

ami ellentmondás. □

Ezen lemmák együttesen implikálják a tételt: a 4.15 lemma szerint C nulldimenziós, a 4.16 lemma szerint pedig minden g-szlalom lefedhető egy jobb-eltoltjával.

Ekkor mivel ZFC-vel konzisztensen kontinuumnál kevesebb g-szlalom fedi a G csoportot, konzisztensen C-nek kontinuumnál kevesebb eltoltja fedi G-t. $\square$

Irodalomjegyzék

[A] Abért M.: *Less than continuum many translates of a compact nullset may cover any infinite profinite groups*, Journal of Group Theory **11** (2008), No 4., 545-553.

[DK] U. B. Darji, Keleti T.: *Covering the real line with translates of a compact set*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003).

[ES] Elekes M., J. Steprans: *Less than 2^ω many translates of a compact nullset may cover the real line*, Fund. Math. **181** (2004), No. 1., 89-96.

[ET] Elekes M., Tóth Á.: *Covering locally compact groups by less than continuum many translates of a compact nullset*, Fund. Math. **193** (2007), 243-257.

[Fal] K. Falconer: *Fractal geometry*, John Wiley & Sons (1990).

[K1] Keleti T.: *A 1-dimensional subset of the reals that intersects each of its translates in at most a single point*, Real Anal. Exchange **24** (1998/99) no. 2, 843-844.

[K2] Keleti T.: *Construction of 1-dimensional subsets of the reals not containing similar copies of given patterns*, Anal. PDE **1** (2008), no. 1, 29-33.

[L] Laczkovich M.: *Valós függvénytan*, egyetemi jegyzet, ELTE Budapest, (1995).

[Má] Máthé A.: *Covering the real line with translates of a zero dimensional compact set*, közlésre benyújtva

[Ma1] P. Mattila: *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge University Press (1995).

[Ma2] P. Mattila: *Hausdorff dimension and capacities of intersections of sets in n-space*, Acta Math. **152** (1984), 77-105.

[Ma3] P. Mattila: *Integralgeometric properties of capacities*, Trans. Amer. Math. Soc. **266** (1981), 539-544.