Lineáris algebra (A, B, C) 10. gyakorlat 2011. november 21–25.

Figyelem! MINTAZH a túloldalon!

1. $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^\top \in \mathbb{R}^2$ esetén melyik definíció szolgáltat skaláris szorzatot?
   a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2\,;$
   b) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2\,;$
   c) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_2 + x_2y_1\,;$
   d) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2\,.$

A 2–5. feladatban $\mathbb{R}^n$–en az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^\top \mathbf{b} = \mathbf{b}^\top \mathbf{a}$ skaláris szorzat szerepel:

2. Számítsa ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszögét $\mathbb{R}^4$–ben:
   a) $\mathbf{a} = [1, 2, 2, 3]^\top$, $\mathbf{b} = [3, 1, 5, 1]^\top$;
   b) $\mathbf{a} = [1, 1, 1, 1]^\top$, $\mathbf{b} = [1, 0, 0, 0]^\top$.

3. Keressen olyan 1 normájú vektort, amely merőleges a $[2, 1, 1, 3]^\top$, $[1, 1, 1, 1]^\top$ és $[1, -1, -1, 1]^\top$ vektorok mindegyikére!

4. Az alábbi szimmetrikus mátrixokhoz megadandó ($\mathbb{R}^2$-ben ill. $\mathbb{R}^3$-ben) SONB, és meghatározandó a mátrixokhoz tartozó kvadratikus alak jellege (milyen definit?)!

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Alkalmazzuk a Schmidt–féle ortogonalizációs eljárást a $\mathbf{b}_1 = [1, 1, 1, 1]^\top$, $\mathbf{b}_2 = [0, 1, 1, 1]^\top$, $\mathbf{b}_3 = [0, 0, 1, 1]^\top$, $\mathbf{b}_4 = [0, 0, 0, 1]^\top$ vektorokra!

6. Vegyük $\mathbb{C}^3$–ben az $\mathbf{a} = [1 - i, 1, i]^\top$, $\mathbf{b} = [1 - i, i, 2]^\top$ vektorokat. Számítsuk ki a $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{b}^* \mathbf{a}$ skalárszorzatot és az $\mathbf{a}$ vektor normáját! Határozzuk meg a $\mathbf{c} = [3, y, z]^\top$ vektor ismeretlen komponenseit úgy, hogy merőleges legyen az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra!

7. Legyenek $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ egy komplex euklideszi tér vektorai. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{x} - i\mathbf{y}$ és $i\mathbf{x} + \mathbf{y}$ merőlegesek egymásra, akkor $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineárisan összefüggők.

8. Igazolja, hogy tetszőleges euklideszi térben teljesül minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}$-ra, hogy

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\right).$$

9. Legyen $\mathbf{a}$ egy V euklideszi tér vektora. Mutassa meg, hogy $\{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle = 0\}$ altér.

10. Legyen $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ egy euklideszi tér ortonormált bázisa. Igazoljuk, hogy a tér tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektoraira teljesül, hogy

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, \qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j \rangle \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{y} \rangle, \qquad \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{x} \rangle|^2.$$