

Maradékosztályok, maradékrendszerek, Euler–Fermat-tétel

(TMR=teljes maradékrendszer, RMR=redukált maradékrendszer)

66. Kommentáljuk Butus Maximus professzor alábbi „tételét” és „bizonyítását”:

„Tétel: Bármely $n > 3$ egészre $\binom{n}{4} \equiv \binom{n+1}{4} \pmod{4}$.”

Bizonyítás: Mivel bármely n egészre $n + 1 \equiv n - 3 \pmod{4}$, ezért

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \equiv \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \binom{n+1}{4} \pmod{4}.$$

67. (a) Igazoljuk, hogy egy TMR elemeihez ugyanazt a számot hozzáadva ismét TMR-t kapunk.
 (b) Igaz-e hasonló állítás RMR-re?
 (c) Milyen m -ekre választható ki egy 10 differenciájú végtelen számtani sorozatból TMR mod m ?
 (d) Milyen m -ekre választható ki egy egész hányadosú végtelen mértani sorozatból TMR mod m ?
68. Milyen maradékot ad m -mel osztva egy mod m (a) TMR; (b) RMR elemeinek az összege?
69. Egy futóversenyen a versenyzők rendre az 1, 2, 3, ... rajtszámokat kapták. A verseny után Alapos Alajos a következő érdekes megfigyelést tette: Ha a rajtszámokhoz mindenkinél hozzáadjuk az elért helyezést (holtverseny nem volt), akkor a kapott összegeket a résztvevők számával maradékosan elosztva csupa különböző maradékot kapunk. Lehet-e, hogy a versenyen a) 101-en; b) 100-an indultak?
70. Egy kör alakú tisztás mentén m fa áll, mindegyiken egy-egy mókusz. A mókuszok össze szeretnének gyűlni egy fán, de csak a következőképpen változtathatják a helyüket. Két tetszőleges mókusz egyidejűleg átugorhat a szomszédos fára, de ellenkező körúljárási irányba kell ugorniuk. Ezt a lépést akárhányszor ismételtetik. Milyen m esetén tudnak összegyűlni a mókuszok?
71. Ha 59^{100} -t átszámítjuk 6-os alapú számrendszerbe, mi lesz a két utolsó számjegy?
72. Mely n -ekre igaz, hogy $n \mid 2^{n!} - 1$?
73. a) Bizonyítsuk be, hogy 2009-nek végtelen sok (pozitív egész kitevős) hatványa végződik 2009-re, de hasonló állítás nem igaz a 2009 helyett 2008-ra. (*) Mi a helyzet 2016-ra?
 b) Mutassuk meg, hogy a 2009-nek létezik csupa 9-es számjegyből álló többszöröse, de hasonló állítás nem igaz a 2009 helyett 2008-ra.
74. Lássuk be, hogy $341 = 11 \cdot 31$ kettes alapú álprím, azaz „imitálja a kis Fermat-tételt”: $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$.
75. Igazoljuk, hogy $930930 \mid n^{61} - n$ minden n természetes számra teljesül.
76. Lássuk be, hogy ha $(ab, 21) = 1$, akkor $63 \mid a^6 - b^6$.