

Prímszámok, diofantikus egyenletek

51. Halhatatlan kapitánynak három halhatatlan unokája van, akiknek az életkora három különböző prímszám és ezek négyzetének összege is prímszám. Hány éves a kapitány legkisebb unokája? (Ne felejtsük el, hogy az unokák halhatatlanok, tehát akár több millió évesek is lehetnek!)
52. a) Hány olyan p prímszám van, amelyre (a1) $p + 2$ és $p + 4$; (a2) $3p \pm 2$ és $3p \pm 4$ is prímszámok?
b) Hány olyan $n > 0$ egész létezik, amelyre (b1) $n^3 - n + 3$; (b2) $n^4 + 4$ prímszám?
53. Legyen $F_n = 2^{2^n} + 1$ az n -edik Fermat-szám.
a) Lássuk be, hogy $F_n = F_0 F_1 \dots F_{n-1} + 2$ ($n \geq 1$).
b) Mutassuk meg, hogy az F_n számok páronként relatív prímek. Hogyan nyerhetünk ebből új bizonyítást arra, hogy végtelen sok prímszám van?
54. (a) Van-e végtelen hosszú számtani sorozat csupa (különböző) prímszámból?
(b) Milyen hosszú mértani sorozat képezhető (különböző) prímszámokból?
55. Mutassuk meg az általános Dirichlet-tétel felhasználása nélkül, hogy végtelen sok olyan prímszám létezik, amely 3-mal osztva 2-t ad maradékul.
56. Van-e olyan prímszám, amelynek legalább 2010 szomszédos számjegye 0?
57. Bizonyítsuk be, hogy $n > 1$ -re $n! (= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)$ nem lehet teljes hatvány.
58. Hány olyan prímszám van, amelynek az (a) utolsó; (b) első számjegye 1?
59. Egy tepsi süteményt akarunk (a tepsi oldalaival párhuzamosan, téglalap alakú darabokra) felszeletelni. Mivel nem tudjuk, ki szereti a „ropogósat” (amelynek legalább egyik oldala érintkezett a tepsi falával), illetve az „omlósat” (amelynek nincs ilyen oldala), minden adagba egy „ropogós” és egy „omlós” darabot teszünk. Hogyan vágjuk fel a süteményt, hogy ugyanannyi ropogós és omlós szelet keletkezzék?
60. Lássuk be, hogy minden pozitív páratlan prímszám egyértelműen áll elő két különböző pozitív egész harmonikus közepeként.
61. Melyek azok a három egész számból álló, 3 differenciájú számtani sorozatok, amelyek elemeinek a szorzata egy nemnulla köbszám?
62. Alkothat-e két pozitív négyzetszám és egy négyzetszám háromszorosa (valamilyen sorrendben) számtani sorozatot?
63. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, akkor ezek szorzata osztható 60-tal.
64. Adjuk meg az összes olyan derékszögű háromszöget, amelynek az oldalai egész számok és a kerület és terület (mértékszáma) megegyezik.
65. Beosztható-e 6 szomszédos egész szám két (diszjunkt) csoportba úgy, hogy az egyik csoport elemeinek a szorzata megegyezzen a másik csoport elemeinek a szorzatával?