

Kanonikus alak, $d(n)$, $\sigma(n)$, $\varphi(n)$, tökéletes számok

Összefoglaló: Végig pozitív egészekre szorítkozunk, a felbonthatatlan és a prím ekvivalenciája miatt a prím(szám) elnevezést használjuk. A p_i -k különböző prímekeket jelölnek, a kitevők pozitív egészek, de időnként célszerű a 0 kitevőt is megengedni, pl. ha két szám kanonikus alakját pontosan ugyanazokkal a prímekekkel akarjuk felírni.

Legyen $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, $k = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$.

Osztó: $d \mid n \iff d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_r^{\delta_r}$, $0 \leq \delta_i \leq \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Lnko: $(n, k) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \dots p_r^{\min(\alpha_r, \beta_r)}$.

Lkkt: $[n, k] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \dots p_r^{\max(\alpha_r, \beta_r)}$. Ebből következik az is, hogy az lkkt osztója a két szám minden közös többszörösének (azaz „kitüntetett közös többszörös”).

n pozitív osztóinak a száma $d(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$.

n pozitív osztóinak az összege

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \dots (1 + p_r + \dots + p_r^{\alpha_r}) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1}.$$

az $1, 2, \dots, n$ számok közül az n -hez relatív prímek száma

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \dots (p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r-1}) = p_1^{\alpha_1-1} (p_1 - 1) \dots p_r^{\alpha_r-1} (p_r - 1).$$

Figyelem: $d(n)$ és $\sigma(n)$ képlete akkor is érvényben marad, ha az n kanonikus alakjában 0 kitevőket is megengedünk, $\varphi(n)$ képlete azonban csak pozitív kitevőkre érvényes.

Mindhárom függvényre érvényes: $(a, b) = 1 \Rightarrow h(ab) = h(a)h(b)$.

37. Igazoljuk, hogy $(a^3, b^3) = (a, b)^3$.

38. Hány olyan $1 \leq x \leq y$ egész számpár létezik, amelyekre $[x, y] = 3000$ és $(x, y) = 60$?

39. Számítsuk ki $d(n)$, $\sigma(n)$ és $\varphi(n)$ értékét a 99 és 20^{100} helyeken.

40. (a) Hány pozitív osztója van a $26^6 \cdot 27^7 \cdot 28^8$ számnak?

(b) Hány relatív prím ezek közül a 21-hez?

(c) És hány osztható 21-gyel?

41. Hány számnak van pontosan 2010 pozitív osztója, és melyik a legkisebb ilyen szám?

42. Mely n -ekre lesz (a) $d(n)$; (b) $\varphi(n)$; (c) $\sigma(n)$ páratlan szám?

43. Egy várúr börtönének 400 szűk cellájában egy-egy rab sínylődik. A cellák ajtaján levő zár úgy működik, hogy egy elfordítás esetén nyílik, még egy elfordítás esetén ismét bezárul stb. Jelenleg természetesen minden ajtó zárva van. A várúr a születésnapján elhatározza, hogy nagylelkű lesz, és megparancsolja az egyik őrnek, hogy fordítson egyet valamennyi záron. Közben azonban meggondolja magát, és utánaküld egy másik őrt, akit azzal bíz meg, hogy minden második záron fordítson egyet. Ezt követi a harmadik őr, aki minden harmadik záron változtat stb., végül a négyszázadik őr a négyszázadik cella zárjának az állását módosítja. Azok a rabok szabadulnak ki, akiknek most nyitva áll az ajtaja. Hány rabot bocsátott szabadon a várúr?

44. Bizonyítsuk be, hogy ha $(a, b) > 1$, akkor

a) $d(ab) < d(a)d(b)$; b) $\sigma(ab) < \sigma(a)\sigma(b)$; c) $\varphi(ab) > \varphi(a)\varphi(b)$.

45. Mutassuk meg, hogy bármely n pozitív egészre $\varphi(n) + d(n) \leq n + 1$. Mikor áll egyenlőség?

46. Mely n -ekre lesz (a) $\varphi(n)$ kettőhatvány; (*b) $\sigma(n)$ kettőhatvány?

47. Mutassuk meg, hogy

a) $d(n) \leq n/2 + 1$; b) $d(n) \leq n/3 + 2$; c) $d(n) \leq 2\sqrt{n}$.

48. Igazoljuk, hogy $\varphi(n) \mid \varphi(25n)$. Mik a hányados lehetséges értékei?

49. Mennyi egy tökéletes szám (pozitív) osztóinak a reciprokösszege?

50. Lássuk be ($k > 0$ egész): (a) $2^k - 1$ prím $\Rightarrow k$ prím; (b) $2^k + 1$ prím $\Rightarrow k$ kettőhatvány.