

Kongruenciák, lineáris diofantikus egyenlet, lnko

16. Bizonyítsuk be a 3-mal, 9-cel, 4-gyel, 125-tel és 11-gyel való oszthatósági szabályokat. Általánosítsuk ezeket más alapú számrendszerekre.
17. Képezzük az 1234^{567} szám (tízes számrendszerbeli) számjegyeinek az összegét, majd az így kapott szám számjegyeinek az összegét stb., amíg egyjegyű számhoz nem jutunk. Mi lesz a végeredmény?
18. Lássuk be: (a) $57 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1}$; (b) $37 \mid 3^{n+1} \cdot 7^{2n+1} + 2^{4n+4} \cdot 17^{2n}$.
19. Melyek igazak?
- a) $a \equiv b \pmod{k}, a \equiv b \pmod{n} \implies a \equiv b \pmod{kn}$.
 - b) $a \equiv b \pmod{k}, a \equiv b \pmod{n} \implies a \equiv b \pmod{[k, n]}$.
 - c) $a \not\equiv b \pmod{k}, c \not\equiv d \pmod{k} \implies a + c \not\equiv b + d \pmod{k}$.
 - d) $a \not\equiv b \pmod{k}, b \not\equiv c \pmod{k} \implies a \not\equiv c \pmod{k}$.
 - e) $a \equiv b \pmod{k} \implies a \equiv b \pmod{5k}$.
 - f) $a \equiv b \pmod{5k} \implies a \equiv b \pmod{k}$.
 - g) $a \equiv b \pmod{k}, c \equiv d \pmod{n} \implies a + c \equiv b + d \pmod{k + n}$.
 - h) $a \equiv b \pmod{k}, c \equiv d \pmod{n} \implies a + c \equiv b + d \pmod{(k, n)}$.
 - i) $a^2 \equiv b^2 \pmod{k} \implies a \equiv b$ vagy $a \equiv -b \pmod{k}$.
20. Igaz-e, hogy $n \mid a^2 + b^2 \implies n \mid a^2$, ha n értéke (a) 3; (b) 5; (c) 4; (d) 8?
21. Tegyük fel, hogy három köbszám összege osztható 7-tel. Mutassuk meg, hogy ekkor a szorzatuk is osztható 7-tel.
22. Egy szigeten (mutáció következtében) 33- és 19-fejű sárkányok élnek. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy összesen 10000 (tízökádó) fejük van? Adjunk is meg olyan esetet, amikor mindkét fajtából legalább 100 példány található.
23. Adjunk meg olyan 2010-nél nagyobb egészt, amelynek a 18-szorosát 7-es számrendszerben felírva az utolsó jegy 4, az utolsó előtti jegy pedig 6.
- *24. Létezik-e 1000 darab olyan (nem feltétlenül egybevágó) kocka, amelyekből (hézagmentesen és mindegyiket egyszer felhasználva) összerakható egy nagyobb kocka?
25. Mennyi (a) $(12345678, 123456)$; (b) $(3^{15} - 1, 3^9 - 1)$?
26. Van-e olyan n , amelyre a (a) $\frac{2n+1}{5n+3}$; (b) $\frac{4n^2+11}{6n^2+13}$ tört egyszerűsíthető?