

Oszthatóság

9. Írjunk le egy háromjegyű számot kétszer egymás mellé. Mutassuk meg, hogy az így kapott hatjegyű szám osztható 91-gyel.
10. a) Milyen maradékot adhat egy négyzetszám 4-gyel osztva? És 8-cal osztva?
b) Adjunk meg végtelen sok olyan pozitív egészt, amely nem írható fel (b1) 2; (b2) 3 négyzetszám összegeként. (Vizsgáljuk meg először szisztematikusan konkrét számokra, felírhatók-e vagy sem, és keressünk szabályszerűségeket.)
11. (a) Az $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ azonosság (egyik) általánosításaként igazoljuk az $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$ azonosságot.
(b) Keressünk hasonló típusú felbontásokat $x^{2k+1} + y^{2k+1}$, illetve $x^{2k} - y^{2k}$ esetén, mindkét esetben $x + y$ legyen az egyik tényező. (Az egyik lehetőség, ha az előző azonosságban y helyére $-y$ -t írunk, és különválasztjuk a páros, illetve páratlan n esetet.)
(c) Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b egész és n, k természetes számra
(i) $a - b \mid a^n - b^n$; (ii) $a + b \mid a^{2k+1} + b^{2k+1}$; (iii) $a + b \mid a^{2k} - b^{2k}$.
(d) Mutassuk meg, hogy (i) $13 \mid 14 \cdot 15^{100} - 53 \cdot 67^{100}$; (ii) $41 \mid 5^{2010} + 6^{2010}$.
12. Melyek igazak? (Az igazakat bizonyítsuk be, a hamisakra adjunk ellenpéldát.)
(a) Ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid 3b + 5c$. (b) Ha $a \mid b + c$, akkor $a \mid b$ és $a \mid c$.
(c) Ha $ab \mid c$, akkor $a \mid c$ és $b \mid c$. (d) Ha $a \mid c$ és $b \mid c$, akkor $ab \mid c$.
(e) Ha $a \mid b$ vagy $a \mid c$, akkor $a \mid bc$. (f) Ha $a \mid bc$, akkor $a \mid b$ vagy $a \mid c$.
(g) Ha $a \mid b + c$ és $a \mid b - c$, akkor $a \mid b$ és $a \mid c$.
(h) Ha $a \mid 2b + 3c$ és $a \mid 3b + 5c$, akkor $a \mid b$ és $a \mid c$.
13. Tegyük fel, hogy az (a, b, c) számjegyekből álló, 10-es számrendszerben felírt) $\overline{abc}$ háromjegyű szám osztható 27-tel. Igazoljuk, hogy ekkor a $\overline{bca}$ szám is osztható 27-tel.
14. Hányszor fordul elő, hogy egy négyzetszám (i) 1-gyel nagyobb; (ii) 1-gyel kisebb egy másik négyzetszám háromszorosánál?
15. Láttuk, hogy a 0-ra végződő számoknál az 1000 többféleképpen bomlik itteni törzsszámok szorzatára: $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 20 \cdot 50$.
a) Hány ilyen tulajdonságú szám van?
b) Adjunk meg olyan számot, amelynek legalább 2010-féle felbontása van.
c) Van-e olyan szám, amelynek egyik felbontásában 2, egy másik felbontásában pedig 100 törzsszám szerepel?