

Wilson-tétel, rend, primitív gyök

85. Mely $p > 4$ prímekre teljesül $p \mid (p-4)! - 20$?
86. Legyen $a_1, \dots, a_k$, ill. $b_1, \dots, b_k$ az $1, 2, \dots, k$ számok két tetszőleges permutációja. Lássuk be, hogy az $a_1 b_1, \dots, a_k b_k$ szorzatok között biztosan lesz két olyan, amelyek különbsége osztható k -val, ha k értéke (a) 61; (b) 60; (c*) $n > 2$ tetszőleges.
87. Milyen maradékot ad $59!$, ha 6100 -zal maradékosan elosztjuk?
88. Igazoljuk, hogy $41 \mid \binom{40}{10} + \binom{40}{15}$.
89. Legyen $p > 2$ prím.
- (a) Milyen maradékot ad p -vel osztva $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2$?
- (b) Milyen p -kre oldható meg az $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ kongruencia?
90. Mennyi a 71 rendje modulo (a) 14; (b) 18; (c) 16; (d) 17?
91. Legyen $m > 2$. Melyek igazak?
- a) Ha $c \equiv -1 \pmod{m}$, akkor $o_m(c) = 2$.
- b) Ha $o_m(c) = 2$, akkor $c \equiv -1 \pmod{m}$.
- c) Ha $o_m(c) = 2$, és m prím, akkor $c \equiv -1 \pmod{m}$.
92. Van-e olyan p prímszám, amelyre $o_p(2) = 6$?
93. Számítsuk ki $o_{47}(22)$ értékét.
94. Mi mondható $o(c^3)$ -ról, ha tudjuk, hogy $o(c)$ értéke 15, illetve 14? Milyen kapcsolatban áll általában $o(c^k)$ és $o(c)$?
95. Melyek igazak?
- a) Ha $o(a) = o(b) = 4$, akkor $o(ab) \mid 4$.
- b) Ha $o(a) = o(b) = 4$, akkor $o(ab) = 4$.
- c) Ha $o(a) = 4$, $o(b) = 6$, akkor $o(ab) \mid 12$.
- *d) Ha $o(a) = 4$, $o(b) = 5$, akkor $o(ab) = 20$.
96. Valaki megsúgta, hogy $2^{73} - 1$ -nek van egy 300 és 800 közötti prímosztója. Melyik ez az osztó? (Számológép, Mersenne-számokról szóló könyv vagy kínvallatás alkalmazása nem fair!)
97. Bizonyítsuk be, hogy bármely $k > 1$ -re $2010 \mid \varphi(k^{2010} - 1)$.
98. Adjunk meg egy primitív gyököt mod 17, és lássuk be, hogy mod 15 nem létezik primitív gyök.
99. Van-e olyan modulus, amely szerint a 4 primitív gyök?
100. Legyen $p > 2$ prím. Milyen maradékot ad p -vel osztva egy primitív gyök $(p-1)/2$ -edik hatványa?