

Alapkészséget ellenőrző feladatok

- C1.** Adjuk meg az összes olyan hatodfokú valós együtthatós polinomot, amelynek az 1 és az $1+i$ is kétszeres gyöke.
- C2.** Oldjuk meg a komplex számok körében a $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$ egyenletet. (Segítség: vizsgáljuk meg először azt, hogy van-e racionális megoldás.)
- C3.** Írjuk fel az $x^4 + 4$ polinom gyöktényezősz alakját, majd állítsuk elő ezt a polinomot két másodfokú valós együtthatós polinom szorzataként.
- C4.** Legyen α és β az $ax^2 + bx + c$ polinom két gyöke. Írjuk fel az $(\alpha - \beta)^2$ kifejezést a polinom együtthatói segítségével.
- C5.** Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei.
a) Mennyi a gyökök reciprokkösszege?
b) Írjunk fel egy olyan nemnulla polinomot, amelynek a^2, b^2 és c^2 is gyöke.
- C6.** Igazoljuk, hogy az $x^3 - x^2 - 2x + 1$ polinomnak három különböző valós gyöke van. Legyenek ezek a, b, c . Írjuk fel azt a normált harmadfokú polinomot, amelynek gyökei $a - 1, b - 1, c - 1$.
- C7.** Legyen $f(x) = \sum_{i=0}^n a_n x^n$ tetszőleges polinom. Írjuk fel a $g(x) = f(-x)$ polinomot, majd mutassuk meg, hogy az fg polinomban minden nemnulla tag foka páros.
- C8.** Legyenek az a_i, b_i számok egy T test elemei. Tegyük fel, hogy az $f \in T[x]$ polinomra $f(a_i) = b_i$ teljesül $i = 1, 2, \dots, n$ esetén, továbbá a_{n+1} különbözik az $a_1, \dots, a_n$ számoktól. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $c \in T$ szám, mellyel a $g(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + f(x)$ polinomra $g(a_i) = b_i$ teljesül $i = 1, 2, \dots, n+1$ esetén. Keressünk ennek alapján olyan legfeljebb harmadfokú polinomot, amely az 1,2,3,4 helyeken rendre a 3,3,9,27 értékeket veszi fel. (Előbb egy olyan legfeljebb másodfokú polinomra lesz szükségünk, amely az 1,2,3 helyeken rendre a 3,3,9 értékeket veszi fel. Azelőtt pedig?)

Ötletesebb, elgondolkodtatóbb feladatok

- B1.** Mutassuk meg, hogy minden $f \in T[x]$ polinomhoz található olyan nemnulla $g \in T[x]$ polinom, hogy az fg polinomban minden nemnulla tag foka prímszám.
- B2.** Mutassuk meg, hogy nincs olyan racionális együtthatós polinom, amely pontosan egy egész helyen vesz fel nem egész értéket. Létezik-e ilyen tulajdonságú valós együtthatós polinom?
- B3.** Igazoljuk, hogy az $x^3 - x^2 - 2x + 1$ polinom a, b, c gyökeire vagy $a - ab = 1$, vagy $a - ac = 1$ teljesül.
- B4.** Alakítsuk szorzattá az $x^4 + 4y^4$ kifejezést. Mely p prímszámokra létezik olyan x egész szám, amelyre $x^4 + 4^x = p$?