

## Alapkészséget ellenőrző feladatok

- C1.** Írjuk fel  $\mathbb{Z}_8$  fölött a  $2x^2 + x + 7$  és  $4x^2 + 2x + 7$  polinomok összegét, illetve szorzatát.
- C2.** Mi lesz az  $(x+1)^{20}$  és az  $x^{20} + x^{19} + \dots + x^2 + x + 1$  valós együtthatós polinomok szorzatában  $x^{20}$  együtthatója?
- C3.** Mutassuk meg, hogy ha  $f \in \mathbb{Z}[x]$  és  $a, b \in \mathbb{Z}$ , akkor  $f(a) - f(b)$  osztható  $(a - b)$ -vel.
- C4.** A Horner-elrendezés segítségével állapítsuk meg, hogy az  $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$  polinom milyen értéket vesz fel az  $x = 3$  helyen, és írjuk is fel a polinomot  $f(x) = (x - 3)g(x) + f(3)$  alakban.
- C5.** Mutassuk meg a Horner-elrendezés segítségével, hogy az  $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$  polinomnak gyöke a 2. Hányszor lehet kiemelni a polinomból az  $x - 2$  gyöktényezőt? Deriváljuk (formálisan) a fenti polinomot, majd ellenőrizzük, hogy az így kapott polinomnak is gyöke a 2.
- C6.** Hány különböző  $f : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  függvény van? Bizonyítsuk be, hogy minden véges, nem csak a nullelemből álló kommutatív gyűrű felett található két különböző polinom úgy, hogy a nekik megfelelő polinomfüggvények megegyeznek.
- C7.** Igazoljuk, hogy tetszőleges racionális/komplex szám gyöke egy alkalmas egész/valós együtthatós polinomnak. (Ez tehát két feladat.)
- C8.** Írjuk fel az  $x^2 - 3x + 2$ , az  $x^6 - 1$ , az  $x^6 + 1$  és az  $x^3 + i$  polinomok gyöktényezősz alakját (a komplex számtest fölött).

## Ötletesebb, elgondolkodtatóbb feladatok

- B1.** Egy egész együtthatós polinom a 0 és az 1 helyen is az 1 értéket veszi fel. Bizonyítsuk be, hogy a polinomnak nincs egész gyöke.
- B2.** Legyen  $R$  kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrű,  $f \in R[x]$ . Bizonyítsuk be, hogy  $a \in R$  pontosan akkor többszörös gyöke  $f$ -nek, ha  $f(a) = f'(a) = 0$ .
- B3.** Jelölje  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$  az 1-től különböző  $n$ -edik egységgyököket.
- Bizonyítsuk be, hogy  $(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_{n-1}) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ .
  - Mivel egyenlő  $(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \dots (1 - \varepsilon_{n-1})$ ?
  - Számítsuk ki egy egység sugarú körbe írt szabályos  $n$ -szögben az egyik csúcsot a többivel összekötő szakaszok hosszának szorzatát.
- B4.** Igazoljuk, hogy az  $f(x) = \sin x$  és a  $g(x) = e^x$  függvények egyike sem polinomfüggvény a valós számtest fölött.