

Alapkészséget ellenőrző feladatok

- C1.** Mutassuk meg, hogy az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vektorok lineárisan összefüggők. Mennyi a vektorrendszer rangja?
- C2.** Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ vektorok viszont lineárisan összefüggők. Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{b}$ vektor felírható az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.
- C3.** Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ vektorok lineárisan függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}, \dots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}$ vektorok is lineárisan függetlenek.
- C4.** Oldjuk meg az alábbi mátrix-egyenleteket:

$$\begin{array}{ll} a) \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & b) \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ c) \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Z = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & d) \quad V \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \end{array}$$

- C5.** Igazoljuk, hogy ha az AB mátrixszorzat létezik, akkor $B^\top A^\top$ is létezik, és $(AB)^\top = B^\top A^\top$. Mutassuk meg azt is, hogy ha $A + A^\top$, illetve $AA^\top$ létezik (mikor is?), akkor ezek szimmetrikus mátrixok, vagyis megegyeznek a transzponáltjukkal.

Ötletesebb, elgondolkodtatóbb feladatok

- B1.** Adott $\mathbb{Q}^n$ -ben néhány vektor. Mindegyiket felfoghatjuk úgy is, mint $\mathbb{R}^n$ egy-egy eleme. Mutassuk meg, hogy ha a vektorok $\mathbb{R}^n$ -ben függetlenek, akkor $\mathbb{Q}^n$ -ben is azok. Igaz-e az állítás megfordítása?
- B2.** Mi történhet egy mátrix rangjával, ha az egyik elemét megváltoztatjuk? Mutassunk egy-egy példát mindhárom lehetséges esetre.
- B3.** Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}, \dots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}$ vektorok lineárisan összefüggők legyenek?
- B4.** Igazoljuk, hogy ha az AB mátrixszorzat létezik, akkor $r(AB) \leq r(B)$. Mutassuk meg azt is, hogy ha az A mátrix invertálható, akkor itt egyenlőség áll.
- B5.** Tegyük fel, hogy az $A \in T^{n \times n}$ mátrix valamelyik pozitív egész kitevős hatványa a nullmátrix. Mutassuk meg, hogy $E_n - A$ invertálható.