

Alapkészséget ellenőrző feladatok

- C1.** Igazoljuk, hogy a $2x^3 + 6x^2 + 24x + 120$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Irreducibilis-e $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{Z}$ fölött?
- C2.** Adjunk meg olyan n egész számot, amelyre $x^4 + nx + 12$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és olyant is, amelyre nem az.
- C3.** Igazoljuk a Schönemann–Eisenstein kritérium következő ‘fordított’ változatát. Ha az

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

polinomhoz létezik olyan p prímszám, hogy p nem osztója a konstans tagnak, p osztója az összes többi együtthatónak, de p^2 nem osztója a főegyütthatónak, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

- C4.** Jelöljön p egy prímszámot. Adott $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinomhoz képezzük az $\bar{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomot úgy, hogy f minden együtthatóját modulo p tekintjük. Mutassuk meg, hogy ha $\bar{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. $\mathbb{Z}$ fölött is biztosan az lesz?
- C5.** Bontsuk fel a $2x^4 + 1$ polinomot $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött is irreducibilis tényezők szorzatára.
- C6.** Mutassuk meg, hogy a $3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 7x + 9$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. (Segítség: 10. feladatsor B1.)
- C7.** Legyen $f(x) = x^6 - x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 13x^2 - x - 6$. Számítsuk ki f és f' kitüntetett közös osztóját, majd oldjuk meg az $f(x) = 0$ egyenletet. Oldjuk meg a két részfeladatot fordított sorrendben is!
- C8.** Bontsuk fel a $2x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 9x + 6$ polinomot $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis tényezők szorzatára.

Ötletesebb, elgondolkodtatóbb feladatok

- B1.** Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f = n$. Tegyük fel, hogy $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ olyan különböző egész számok, melyekre $f(a_i)$ prímszám. Igazoljuk, hogy f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.
- B2.** Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ különböző egész számok. Igazoljuk, hogy az

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$$

polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

- B3.** Tegyük fel, hogy $\sqrt[5]{2}$ gyöke az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak. Mutassuk meg, hogy $f(2)$ osztható 30-cal.
- B4.** Legyen $f = \Phi_p$. Mely p prímekre igaz, hogy $\bar{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött?
- B5.** Írjuk fel a Φ_{25} és a Φ_{27} polinomokat, majd igazoljuk, hogy ezek irreducibilisek $\mathbb{Q}$ fölött. Mely körosztási polinomok irreducibilitását lehetne még hasonló módszerrel belátni?