

Alapkészséget ellenőrző feladatok

- C1.** Számoljunk $\mathbb{C}$ -ben! $(3 - 4i)(7 + 8i) =$ $|12 + 5i| =$ $(5 + i) : (2 - i) =$ $i^{1234} =$
- C2.** Számoljuk ki $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ négyzetét, köbét és inverzét (vagyis reciprokát).
- C3.** Határozzuk meg az $1 - i$ szám nyolcadik és kétezerkilencedik hatványát.
- C4.** Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenleteket.
- $$z^2 = -4 \quad z^2 + 12 = 0 \quad z^2 + 4z + 5 = 0 \quad z^2 - 2i = 0 \quad z^2 + 15 - 8i = 0 \quad \bar{z} = 9/z + 8$$
- C5.** Oldjuk meg a $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + 2 - 2i = 0$ és a $z^2 + (i - 2)z + 6 - 6i = 0$ másodfokú egyenleteket.
- C6.** Igazoljuk, hogy a konjugálás, mint $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ leképezés művelettartó, azaz bármely $z, w \in \mathbb{C}$ esetén $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ és $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$. Ezt felhasználva, adjunk új bizonyítást arra, hogy két komplex szám szorzatának hossza megegyezik a két szám hosszának szorzatával.
- C7.** Írjuk fel a következő számok trigonometrikus alakját: -12 , $1 + i$, $i - 1$, $\sqrt{3} - i$.
- C8.** Ha a $z \neq 0$ komplex szám trigonometrikus alakja $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, akkor mi lesz $\bar{z}$ trigonometrikus alakja?

Ötletesebb, elgondolkodtatóbb feladatok

- B1.** Két komplex szám összege $5 - i$, szorzata pedig $8 - i$. Melyik két számról van szó? Mennyi a két szám reciprokának összege?
- B2.** Ha $z + 1/z = 1$, akkor mennyi $z^{2009} + 1/z^{2009}$?
- B3.** Az 1-től különböző z komplex számra $z^5 = 1$. Mivel egyenlő $1 + z + z^2 + \dots + z^{2009}$?
- B4.** Írjuk fel az alábbi számok trigonometrikus alakját:

$$\sin 20^\circ + i \cos 20^\circ, \cos 20^\circ + i \cos 20^\circ, 1 + \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ.$$

- B5.** Ábrázoljuk a komplex számsíkon az összes olyan z komplex számot, amelyre a) $2 \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)$
b) $|z - 2| = |z + 2i|$ c) $z + \bar{z} = -2$ d) $|z - 2 - 2i| = 2$ e) $|\bar{z} - 1 + 3i| = \sqrt{5}$ f) $|z| = 2 \operatorname{Re} z$.
- B6.** Ellenőrizzük, hogy a komplex számok körében érvényes a $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ azonosság. Mi ennek a geometriai jelentése?