

Sem írott, sem elektronikus segédeszköz nem használható. A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre. MINDEN FELADAT MEGOLDÁSA KÜLÖN LAPRA IRANDÓ!

1. Igazak vagy Hamisak az alábbi állítások? (A választ karikázza be, indokolnia nem kell. Minden helyes válasz 2 pont, minden rossz válasz -2 pont, nincs válasz: 0 pont.)

I H Van olyan $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, hogy $ABA = \mathbf{0}$, de $BAB = B \neq \mathbf{0}$.

I H $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ -ben az invertálható mátrixoknak ugyanaz a rangja.

I H $\det(A^\top B) = \det(BA)$

I H Ha egy homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixának determinánsa 0, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

I H $\det^2(-A) = \det(A^2)$

A többi feladat megoldását részletezni kell, az eredmény önmagában nem elegendő. Minden feladat értéke 10 pont.

2. $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$. Mi lehet $\varrho(A)$, $|A|$, A^{-1} (ha $\exists$), $|A^{(g)}|$?

3. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ és $n \geq 3$ esetén számítsa ki az alábbi n -szer n -es determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \gamma & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{vmatrix}$$

4. $\alpha \in \mathbb{R}$ és $n \geq 3$ esetén számítsa ki az alábbi n -szer n -es determináns értékét! (A főátló alatt mindenütt α van.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \alpha & \alpha & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

5. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \beta - \gamma \\ \gamma - \alpha \end{bmatrix}$.

a) φ lineáris transzformáció-e?

b) φ vektortér-izomorfizmus-e?

6. Jelölje φ a síknak az x tengelyre való merőleges vetítését, ψ pedig az origó körüli $+45^\circ$ -os forgatást. Írja fel φ és ψ mátrixát az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban. Igaz-e, hogy $\varphi\psi = \psi\varphi$?

7. V n dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, V)$, $\varphi\psi = \psi\varphi$, $V = \langle \text{Ker}\varphi, \text{Ker}\psi \rangle$.

a) Bizonyítandó, hogy $\varphi\psi = o$.

b) Kétdimenziós V esetre megadandó olyan φ és ψ , melyek teljesítik a feladat feltételeit.

5: 46–70 pont; 4,5: 41–45 pont; 4: 36–40 pont; 3,5: 31–35 pont; 3: 26–30 pont; 2,5: 21–25 pont; 2: 16–20 pont; 1,5: 11–15 pont; 1: 10–10 pont.