

Sem írott, sem elektronikus segédeszköz nem használható. A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre. MINDEN FELADAT MEGOLDÁSA KÜLÖN LAPRA IRANDÓ!

1. Igazak vagy Hamisak az alábbi állítások? (A választ karikázza be, indokolnia nem kell. Minden helyes válasz 2 pont, minden rossz válasz -2 pont, nincs válasz: 0 pont.)

I H Az $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ és a $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ térvektorok hajlásszöge 30° .

I H Az $\mathbf{i} - \mathbf{k}$ és az $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ térvektorok skaláris szorzata 0.

I H $\mathbb{R}^n$ -ben minden bázis n elemű.

I H Van olyan V vektortér $\mathbb{R}$ felett, amelyben van 3 elemű bázis és 4 elemű bázis is.

I H Van olyan valós együtthatós lineáris egyenletrendszer, amelynek végtelen sok megoldása van.

A többi feladat megoldását részletezni kell, az eredmény önmagában nem elegendő. Minden feladat értéke 10 pont.

2. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olyan, hogy az $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \beta\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ térvektorrendszer lineárisan összefüggő, továbbá $(\mathbf{b} + \mathbf{a})(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 4$. Mi lehet a $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{c})$?

3. Legyen $V = \{\text{az összes térvektor rögzített } O \text{ kezdőponttal}\}$, $+$ szokásos, de

$$\lambda \bullet \mathbf{a} = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{ha } \lambda \neq 0 \\ \mathbf{0}, & \text{ha } \lambda = 0. \end{cases}$$

Vektortér-e V az $\mathbb{R}$ felett $+$, $\lambda \bullet$ -re nézve?

4. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 1 hosszúságú térvektorok; $\mathbf{a} + \mathbf{b} \perp \mathbf{c} - \mathbf{d}$; $\mathbf{b} + \mathbf{c} \perp \mathbf{d} - \mathbf{a}$; $\mathbf{c} + \mathbf{d} \perp \mathbf{a} - \mathbf{b}$.
 $\alpha) \gamma(\mathbf{d} + \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{c}) = ?$ $\beta) |\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d}| = ?$

5. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert (HASZNÁLHATÓ: Gauss-elimináció, elemi bázistranszformáció)!

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 3x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

6. $n \geq 2$; V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\delta \in \mathbb{R}$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ B V -ben.

$\delta\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_1 + \delta\mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n$, $\dots$, $\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_{n-1} + \delta\mathbf{e}_n$ L?, G?, B? (V -ben)

7. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}$ adott,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} \alpha_i \in \mathbb{R} \\ \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ \text{és} \\ \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 \end{array} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} \beta_i \in \mathbb{R} \\ \beta_1 = \varepsilon\beta_3 + \varepsilon\beta_4 \end{array} \right\}.$$

a) W_1 illetve W_2 altere-e $\mathbb{R}^4$ -nek?

b) Ha valamelyik altér, abban keresendő B.

c) Ha mindkettő altér, akkor $\langle W_1, W_2 \rangle = ?$

5: 46–70 pont; 4,5: 41–45 pont; 4: 36–40 pont; 3,5: 31–35 pont; 3: 26–30 pont; 2,5: 21–25 pont; 2: 16–20 pont; 1,5: 11–15 pont; 1: 10–10 pont.