

1. Határozza meg $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determinánsát, ha ${}_j[\mathbf{A}]_k$ a következő alakú ($a_j, b_k \in \mathbb{R}$) :

- (a) $(-1)^{j+k} \frac{k^2}{j}$ (b) $(-1)^k \sqrt{j} k^3$
 (c) $a_j + b_k$ (d) $1 + a_j b_k$
 (e) $j + k - 1$ (f*) $(j + k - 1)^2$

2. Legyen $\mathbf{U}$ olyan 99–szer 99–es mátrix, amelyre $\mathbf{U}^\top = -\mathbf{U}$. Mennyi $\det \mathbf{U}$?

3. Adjunk képletet $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$ kiszámítására!

4. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, és tegyük fel, hogy $\det \mathbf{A} \neq 0$. Képezzük az $\mathbf{A}$ mátrix előjelezett aldeterminánsaiból álló $\mathbf{B}$ mátrixot, azaz legyen $b_{ij} = \mathbf{A}_{ij}$, majd ismételjük meg ugyanezt a $\mathbf{B}$ mátrixszal, így nyerjük a $\mathbf{C}$ mátrixot, ahol $c_{ij} = \mathbf{B}_{ij}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{C}$ az $\mathbf{A}$ mátrix valahányszorososa. (Útmutatás: Fejezzük ki $\mathbf{B}$ -t $\mathbf{A}^{-1}$ segítségével!)

$$5. \begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n \times n} = ? , \quad \begin{vmatrix} 2/x & 1/x^2 & & \\ 1 & 2/x & 1/x^2 & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2/x & 1/x^2 \\ & & & 1 & 2/x \end{vmatrix}_{n \times n} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} = ? , \quad \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & & \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & \ddots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}_{n \times n} = ?$$

$$6^*. \begin{vmatrix} \cos \varphi & 1 & & \\ 1 & 2 \cos \varphi & 1 & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2 \cos \varphi & 1 \\ & & & 1 & 2 \cos \varphi \end{vmatrix}_{n \times n} = ? , \quad \begin{vmatrix} 2 \cos \varphi & 1 & & \\ 1 & 2 \cos \varphi & 1 & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2 \cos \varphi & 1 \\ & & & 1 & 2 \cos \varphi \end{vmatrix}_{n \times n} = ?$$

7. Keresendő olyan $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, melyre $\rho(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) \neq \rho(\mathbf{A})$. Egy ilyen példában mi lehet $|\mathbf{A}|$?

8. $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$ esetén legyen $(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^* \underline{y}$, $\|\underline{x}\| = \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})}$. Hasonlítsa össze $(\underline{x}, \underline{y})$ és a térvektorok skaláris szorzatának tulajdonságait: $(\underline{y}, \underline{x})$ és $(\underline{x}, \underline{y})$; $(\underline{x}, \lambda \underline{y})$ és $(\lambda \underline{x}, \underline{y})$ és $\lambda(\underline{x}, \underline{y})$; $(\underline{x}, \underline{y} + \underline{z})$ és $(\underline{x}, \underline{y}) + (\underline{x}, \underline{z})$; $(\underline{x}, \underline{x})$ és 0 kapcsolata? Hasonlítsa össze $\|\underline{x}\|$ és a térvektorok hosszának tulajdonságait!

9*. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixra igaz, hogy $\rho(\mathbf{A}^* \mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A})$.

10. Az alábbi leképezések közül válassza ki a lineáris leképezéseket, a lineáris transzformációkat és a vektortér-izomorfizmusokat, határozza meg mindezek magterét és képterét, valamint ezeknek az altereknek a dimenzióját!

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_1\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}\right) &= \alpha_1 + \alpha_2 & \varphi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_2\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \\ \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi_3\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} & \varphi_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_4\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\right) &= \alpha\beta \\ \varphi_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_5\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \end{bmatrix} & \varphi_6 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_6\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} |\alpha| \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

11. Mik azok a geometriai transzformációk, amelyeknek mátrixa az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban az alábbi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Írjuk fel az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisra vonatkozó mátrixát a sík alábbi lineáris transzformációinak:

- | | |
|------------------------------|--|
| a) 60° -os forgatás; | b) az x tengelyre való tükrözés; |
| c) 270° -os forgatás; | d) az $x = y$ tengelyre való tükrözés. |