

1. Amennyiben lehetséges, adja meg az alábbi mátrixegyenletek egy-egy megoldását.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{I}_2 \quad \text{b) } \mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 \quad \text{c) } \mathbf{X} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Számítsa ki a következő mátrixok inverzét!

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Tegyük fel, hogy $ad - bc = 1$. Számítsa ki az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

4. Az alábbi mátrixok közül melyik milyen speciális fajta mátrix (diagonális mátrix, háromszögmátrix, szimmetrikus mátrix, antiszimmetrikus mátrix, projektormátrix, nilpotens mátrix, invertálható mátrix)? Határozza meg az $\mathbf{M}_8$ összes általánosított inverzét!

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_7 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

5*. Tegyük föl, hogy egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$. Igazolja, hogy ekkor $\mathbf{I}_n + \mathbf{A}$ invertálható mátrix, és határozza meg az inverzét!

6. Számítsa ki az $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ mátrixok determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Határozza meg a következő permutációkban az inverziók számát!

$$\text{a) } 5, 2, 4, 1, 6, 3; \quad \text{b) } n, n-1, \dots, 2, 1; \quad \text{c) } 2, 3, \dots, n, 1.$$

8. Számítsa ki az alábbi determinánsokat az elemi bázistranszformáció módszerével! A számítások mely része szükségtelen a determináns értékének meghatározásához?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 13 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$9. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = ? , \quad \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & \mathbf{2} & \\ & & 3 & & \\ & \mathbf{2} & & \ddots & \\ & & & & n \end{vmatrix} = ?$$

10. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát! Megjegyzés: Ahol nincs más feltüntetve, ott a mátrix $n \times n$ -es.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 13 & 15 & -2 \\ 0 & 6 & 8 \\ 10 & 4 & 14 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 + b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 - b_1 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 - b_2 & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 - b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$