

- (ISM) Legyen $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5$ egy bázis és $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_5$. Mely bázisvektorok „cserélhetők ki” $\mathbf{a}$ -ra úgy, hogy bázist kapjunk? Mindegyik új bázisban számítsa ki a $\mathbf{c} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3 + 4\mathbf{b}_4$ vektor koordinátáit!
- Határozza meg (elemi bázistranszformációk segítségével) az alábbi vektorrendszerek rangját:
 - $[2, 3, 1, 3]^\top, [5, 2, 3, 1]^\top, [1, 2, 0, 3]^\top, [6, 0, 1, 4]^\top, [3, 4, 2, 3]^\top$;
 - $[0, 1, 2, 3]^\top, [1, 2, 3, 0]^\top, [2, 3, 0, 1]^\top, [3, 0, 1, 2]^\top$.
- Az elemi bázistranszformáció módszerével oldja meg a következő egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{rclclcl} -x + 3y + 3z & = & 2 & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 11 & 2x + 3y + z & = & 11 \\ 3x + y + z & = & 4 & x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -7 & x - y - 2z & = & -7 \\ 2x - 2y + 3z & = & 10 & 3x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 & 3x + 2y - z & = & 4 \end{array}$$

- Oldja meg a következő egyenletrendszereket! Milyen következtetés adódik ebből a lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldására nézve?

$$\begin{array}{rclclcl} x + y & = & 2 & x + y & = & 2 & x + y & = & 2 \\ x + 1,001y & = & 2,001 & x + y & = & 2,001 & x + 1,001y & = & 2,002 \end{array}$$

- 5*. Hogyan függ az alábbi egyenletrendszer megoldásainak száma az r paraméter értékétől?

$$\begin{array}{rclclcl} rx_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + rx_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + rx_3 & = & 1 \end{array}$$

- Bizonyítsa be, hogy $r(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) \leq r(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) + r(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$.
- Egy n -dimenziós vektortérben melyek igazak a következő állítások közül?
 - Minden n -nél kevesebb vektorból álló vektorrendszer lineárisan független.
 - Minden n -nél több vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő.
 - Minden generátorrendszer legalább n vektorból áll.
 - Minden legalább n vektorból álló vektorrendszer a tér generátorrendszere.
 - Minden n elemű generátorrendszer a vektortér bázisa.
 - Minden n elemű lineárisan független vektorrendszer a tér bázisa.

- Az $\mathbb{R}^n$ alábbi részhalmazai közül válassza ki az altereket, s ezekben keressen bázist:

- $x_1 = x_2 = \dots = x_n$
- $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$
- $x_1 = x_3 = x_5 = \dots$ és $x_2 = x_4 = x_6 = \dots$
- van olyan i , hogy $x_i = 0$
- van olyan i , hogy $x_i \neq 0$
- $x_1 = x_4 = x_7 = \dots, x_2 = x_5 = x_8 = \dots, x_3 = x_6 = x_9 = \dots$
- g*) adott $y \in \mathbb{R}$ mellett $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y$.

- 9*. Határozza meg az előző feladatban előforduló alterekből alkotható altérpárok által generált altereket!

- 10*. Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények szokásos $\mathbb{R}$ feletti vektorterében a páros függvények is és a páratlan függvények is alteret alkotnak. Határozza meg e két altér által generált alteret!