

1. Az alábbi vektorok halmazának mely részhalmazai alkotnak lineárisan független vektorrendszert?

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2*. Lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e a következő függvények?

- a) $x^2, (x+1)^2, (x+2)^2$; b) $x^2, x+1, (x+2)^2$
c) $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$; d) $\sin x, \cos x, 1$.

3. Döntsük el, hogy a mondott vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e, összefüggők-e, illetve lehetnek ilyenek és olyanok is:

- a) lineárisan független vektorrendszerből elhagyunk egy vektort;
b) lineárisan független vektorrendszerhez hozzáveszünk egy vektort;
c) lineárisan összefüggő vektorrendszerből elhagyunk egy vektort;
d) lineárisan összefüggő vektorrendszerhez hozzáveszünk egy vektort;
e) bázisból elhagyunk egy vektort;
f) bázishoz hozzáveszünk egy vektort;
g) a vektorrendszer egyik vektora egy másiknak négyszerese;
h) a vektorrendszer egyik vektora két másiknak összege;
i) a vektorrendszer egyik vektora a nullvektor.

4. Legyen $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ lineárisan független vektorrendszer. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?

- a) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n$;
b) $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_1$; c) $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n$;
d) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_1$; e) $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n$.

5*. Legyen $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ lineárisan független vektorrendszer. Mely $\mathbf{b}$ vektorokra lesz az $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \dots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}$ vektorrendszer lineárisan összefüggő?

6. Legyen $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ lineárisan független vektorrendszer. Bizonyítsa be, hogy egy $\mathbf{b}$ vektorra az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$.

7. Tudjuk, hogy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \rangle$. Döntsük el, hogy lineárisan független, vagy összefüggő az $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{e}$ vektorrendszer!

8. Keressünk bázisokat a következő alterekben:

- a) $\langle \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}, 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k} \rangle$; b) $\langle \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{k}, \mathbf{j} + \mathbf{k} \rangle$;
c) $\langle \mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{i} \rangle$; d) $\langle \mathbf{i} - 96\mathbf{j} + 29\mathbf{k}, \mathbf{j} + 19\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle$.

9. Legyen $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5$ egy bázis és $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_5$. Mely bázisvektorok „cserélhetők ki” $\mathbf{a}$ -ra úgy, hogy bázist kapjunk? Mindegyik új bázisban számítsa ki a $\mathbf{c} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3 + 4\mathbf{b}_4$ vektor koordinátáit!