

1. Legyenek A, B, C, D egy négyzet csúcsai. Írja fel az $\overrightarrow{AC}$ vektor koordinátáit az alábbi bázisok mindegyikében:

a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$; c) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB}$; d) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

2. Tegyük föl, hogy az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek:

a) $\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$; b) $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a}$; c) $\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{a}$;
d) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{0}, \mathbf{b}$; e) $\mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c}$; f) $\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

3. Tudjuk, hogy az $\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Következik-e ebből, hogy az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok is azok?

4. Tudjuk, hogy az $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}, 4\mathbf{a} + 5\mathbf{b} + 6\mathbf{c}, 7\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + 9\mathbf{c}$ vektorok lineárisan összefüggők. Következik-e ebből, hogy az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok is azok?

5. Számítsa ki az $\mathbf{ab}$ skalárszorzatot a következő esetekben:

a) $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}, |\mathbf{b}| = 2, \text{szög} = 30^\circ$; b) $|\mathbf{a}| = \sqrt{5}, |\mathbf{b}| = 1, \text{szög} = \pi/2$;
c) $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 2, \text{szög} = 180^\circ$; d) $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 1, \text{szög} = 0$;
e) $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}, |\mathbf{b}| = 3, \text{szög} = 135^\circ$; f) $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}, |\mathbf{b}| = \sqrt{2}, \text{szög} = \pi/3$.

6. Határozza meg az $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ vektorok által páronként bezárt szögeket.

7. Legyen $\mathbf{e} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$. Ellenőrizze, hogy $\mathbf{e}$ egységvektor, és számítsa ki az $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektornak $\mathbf{e}$ -vel párhuzamos és $\mathbf{e}$ -re merőleges összetevőjét.

8. Legyen A, B, C, D négy pont a térben. Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB}$ merőleges $\overrightarrow{CD}$ -re és $\overrightarrow{AC}$ merőleges $\overrightarrow{BD}$ -re. Igazolja, hogy ekkor $\overrightarrow{AD}$ merőleges $\overrightarrow{BC}$ -re.

9. Bizonyítsa be, hogy egy paralelogramma négy oldalhosszának négyzetösszege megegyezik a két átló hosszának négyzetösszegével.

10. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{c} \perp \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$ esetén mi lehet a $\mathbf{c}$?

11*. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ és $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$ alapján számítsa ki $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}$ értékét geometriai és algebrai úton is!

12. Adott $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén mely $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorpárokra teljesül, hogy $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ és $\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} \perp \mathbf{b}$?

13*. Mely $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorpárokra teljesül, hogy minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ -re $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \perp \beta\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}$?

14*. $\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - 4\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ esetén mi lehet $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ hajlásszöge?